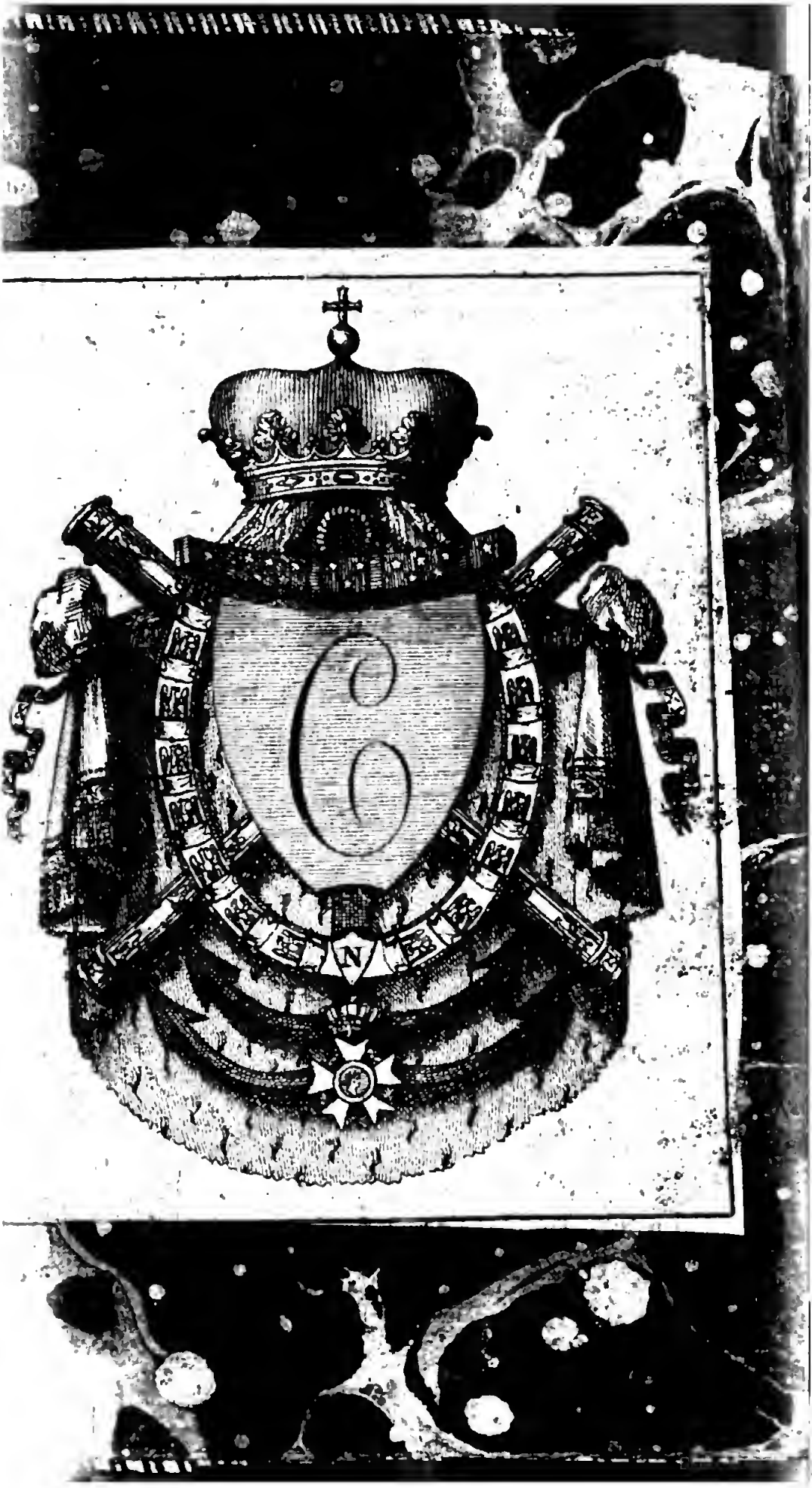

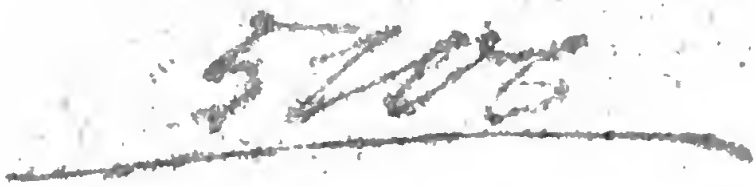

Palat. LX 1 111

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.

Septième Classe.

MATHÉMATIQUES.

Il paroît tous les mois deux volumes de cette Bibliothèque. On les délivre ſoit brochés, ſoit reliés en veau fauve ou écaillé, & dorés ſur tranche, ainſi qu'avec ou ſans le nom de chaque Souſcripteur imprimé au frontiſpice de chaque volume.

La ſouſcription pour les 24 vol. reliés eſt de 72 liv., & de 54 liv. pour les volumes brochés.

Les Souſcripteurs de Province, auxquels on ne peut les envoyer par la poſte que brochés, payeront de plus 7 liv. 4 ſ. à cauſe des frais de poſte.

Il faut s'adreſſer à M. CUCHET, Libraire, *rue & hôtel Serpente, à Paris.*

BIBLIOTHÈQUE

UNIVERSELLE

DES DAMES.

ALGEBRE.

TOME SECOND.

A PARIS,

RUE ET HÔTEL SERPENTE.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

1789.

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
ALGEBRE.
SECONDE PARTIE.
DE L'ANALYSE,
OU
APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLEMES.

APRÈS avoir traverſé les déſerts arides de l'*Algebre* proprement dite, c'eſt-à-dire, des calculs algébriques ſans objet déterminé, nous allons parcourir une route plus amuſante, celle de l'*Analyſe*, ou de l'application de

l'Algebre à la réſolution de quelques problêmes ſimples & faciles. Les Lecteurs vont être récompenſés de leurs travaux & de leur conſtance, par le plaiſir de découvrir des choſes qui paroiſſent au premier coup-d'œil preſqu'impoſſibles à trouver.

L'*Analyſe* eſt proprement la méthode de réſoudre les problêmes mathématiques, en les réduiſant à des équations.

L'*Analyſe*, pour réſoudre tous les problêmes, emploie le ſecours de l'Algebre, ou le calcul des grandeurs en général : auſſi ces deux mots *Analyſe*, *Algebre*, ſont ſouvent regardés comme ſynonymes.

L'Analyſe eſt l'inſtrument ou le moyen général par lequel on a fait depuis près de deux ſiècles, dans les Mathématiques, de ſi belles découvertes. Elle fournit les exemples les plus parfaits de la manière dont on doit employer l'art du

raiſonnement, donne à l'eſprit une merveilleuſe promptitude pour découvrir des choſes inconnues au moyen d'un petit nombre de données, & en employant des ſignes abrégés & faciles pour exprimer les idées, elle préſente à l'entendement des choſes, qui autrement ſembleroient être hors de ſa ſphère. Par ce moyen, les démonſtrations géométriques peuvent être ſingulièrement abrégées; une longue ſuite d'argumens où l'eſprit ne pourroit, ſans le dernier effort d'attention, découvrir la liaiſon des idées, eſt convertie en des ſignes ſenſibles, & les diverſes opérations qui y ſont requiſes, ſont effectuées par la combinaiſon de ces ſignes. Mais ce qui eſt encore plus extraordinaire, c'eſt que, par le moyen de cet art, un grand nombre de vérités ſont ſouvent exprimées par une ſeule ligne; au lieu que, ſi on ſuivoit la manière ordinaire d'expliquer & de démontrer, ces vérités rem-

pliroient des volumes entiers. Ainſi par la ſeule étude d'une ligne de calcul, on peut apprendre en peu de tems des ſciences entières, qui autrement pourroient à peine être appriſes en pluſieurs années.

L'*Analyſe* eſt diviſée, par rapport à ſon objet, en *analyſe des quantités finies*, & *analyſe des quantités infinies*.

Analyſe des quantités finies eſt ce que nous appelons autrement *Arithmétique ſpécieuſe* ou *Algebre*.

Analyſe des quantités infinies ou des infinis, appelée auſſi *la nouvelle Analyſe*, eſt celle qui calcule les rapports des quantités qu'on prend pour infinies, infiniment petites. Une de ſes principales branches eſt la *méthode des fluxions*, ou *le Calcul différentiel*. Nous n'en traiterons pas dans des Elémens auſſi courts que ceux-ci.

Le grand avantage des Mathémati-

ciens modernes ſur les anciens, vient principalement de l'uſage qu'ils font de l'Analyſe.

EQUATION en Algebre ſignifie une expreſſion de la même quantité préſentée ſous deux dénominations différentes.

Auſſi quand on dit $2 \times 3 = 4 + 2$, cela veut dire qu'il y a *équation* entre deux fois trois & quatre plus deux.

On peut définir *l'équation*, un rapport d'égalité entre deux quantités de différentes dénominations, comme quand on dit 60 ſous $= 3^{\text{tt}}$, ou 20 ſous $= 1$ livre, ou $b = d + e$ ou $12 = \frac{a+b}{5}$, &c.

Ainſi, mettre des quantités en *équation*, c'eſt repréſenter, par une double expreſſion, des quantités réellement égales & identiques.

Le caractère ou le ſigne de l'*équation* eſt $=$ ou ∞; ce dernier eſt plus fré-

quent dans les anciens Algébriſtes, & l'autre dans les modernes.

La réſolution des problêmes, par le moyen de leurs *équations*, eſt l'objet de l'Algebre.

Membres d'une équation. Ce ſont les deux quantités qui ſont ſéparées par les ſignes $=$ ou ∞; & *termes d'une équation*, ce ſont les différentes quantités ou parties dont chaque membre de l'équation eſt compoſé, & qui ſont jointes entr'elles par les ſignes $+$ & $-$. Ainſi dans l'équation $b+c=d$, $b+c$ eſt un *membre*, & d l'autre; b, c, d, ſont les termes; & l'équation ſignifie que la ſeule quantité d eſt égale aux deux b & c priſes enſemble.

Racine d'une équation, eſt la valeur de la quantité inconnue de *l'équation*. Ainſi dans l'équation $a^2+b^2=x^2$, la racine eſt $\sqrt{a^2+b^2}$.

Les *équations*, eu égard à la puiſ-

ſance plus ou moins grande, à laquelle l'inconnue y monte, ſe diviſent en *équations* ſimples, quarrées, cubiques, &c.

Equation ſimple ou *du premier degré*, eſt celle dans laquelle l'inconnue ne monte qu'à la première puiſſance ou au premier degré, comme $x = a + b$.

Equation quarrée ou *du ſecond degré*, eſt celle où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt de deux dimenſions, comme $x^2 = a^2 + b^2$, ou $x^2 + ax = bb$, ou celle dans laquelle l'inconnue eſt multipliée par une autre inconnue, toutes deux à la première puiſſance, comme..... $xy = b$.

Equation cubique ou *du troiſième degré*, eſt celle où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt de trois dimenſions, comme $x^3 = a^3 - b^3$ ou $x^3 + axx + bbx = c^3$; ou celle dans laquelle l'inconnue eſt multipliée par une ou par deux autres inconnues, de manière que la ſomme des expoſans de ce

produit ſoit $=3$. *Exemple*, $xyz=b$, ou $x^2y=c$, ou $xz^2=c$.

Si la quantité inconnue eſt de quatre dimenſions, comme $x^4=a^4-b^4$ ou $x^4+ax^3+b^3x=c^4$, l'*équation* eſt appelée *biquadratique* ou *quarrée quarrée*, ou plus communément du *quatrième degré*; ſi l'inconnue a cinq dimenſions, l'équation eſt nommée *ſurde-ſolide*, ou du cinquième degré, &c. Ces deux cas ne changent pas de dénominations, lorſque l'inconnue y eſt multipliée comme ci-deſſus, par une, par deux, par trois, ou par quatre autres inconnues, de manière que la ſomme des expoſans de ce produit ſoit $=4$, ou $=5$.

On peut conſidérer les *équations* ſous deux points de vue, ou comme les dernières concluſions auxquelles on arrive dans la ſolution des problêmes, ou comme les moyens par leſquels on parvient à la ſolution finale.

Les *équations* de la première eſpèce

ne renferment qu'une quantité inconnue mêlée avec d'autres quantités données ou connues ; celles de la ſeconde eſpèce renferment différentes quantités qui doivent être comparées & combinées enſemble, juſqu'à ce que l'on arrive à une nouvelle équation qui ne renferme plus qu'une inconnue mêlée avec des connues.

Pour trouver la valeur de cette inconnue, on prépare & on transforme l'*équation* de différentes manières, qui ſervent à l'abaiſſer au moindre degré, & à la rendre la plus ſimple qu'il eſt poſſible.

La théorie & la pratique des *équations*, c'eſt-à-dire, la ſolution des queſtions par les *équations*, a pluſieurs branches ou parties. 1°. La dénomination qu'on doit donner aux différentes quantités en les exprimant par les ſignes ou ſymboles convenables. 2°. La réduction du problême en équation. 3°. La

réduction de l'*équation* même au degré le plus bas, & à la forme la plus ſimple. 4°. On y peut ajouter la ſolution de l'équation, ou la repréſentation de ſes racines par des nombres ou des lignes. Nous allons d'abord donner les régles particulières aux deux premiers articles, c'eſt-à-dire, en général la méthode de mettre en *équation* une queſtion propoſée.

Une queſtion ou un problême étant propoſé, on ſuppoſe que les choſes cherchées, ou demandées ſont déjà trouvées, & on les marque ordinairement par les dernières lettres de l'alphabet comme u, x, y, z, &c. marquant en même-tems les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet, comme a, b, c, d, e, f, &c. Lorſque celles de notre alphabet ne ſuffiſent pas, on emploie encore l'alphabet grec.

Toutes les quantités qui doivent entrer dans la queſtion, étant ainſi nom-

mées, on examine ſi la queſtion eſt ſujette à reſtriction, ou non, c'eſt-à-dire, ſi elle eſt déterminée ou indéterminée. Voici les règles par leſquelles on peut le ſavoir.

1°. S'il y a plus de quantités inconnues qu'il n'y a d'équations données ou renfermées dans la queſtion, le problême eſt indéterminé, & peut avoir une infinité de ſolutions. Quand les *équations* ne ſont pas expreſſément contenues dans le problême, on les trouve par le moyen des théorêmes ſur l'égalité des grandeurs.

2°. Si les équations données ou renfermées dans le problême, ſont préciſément en même nombre que les quantités inconnues, le problême eſt déterminé, c'eſt-à-dire, n'admet qu'un nombre de ſolutions limité.

3°. S'il y a moins d'inconnues que d'*équations*, le problême eſt plus que déterminé, & on découvre quelquefois

qu'il eſt impoſſible par les contradictions qui ſe trouvent dans les équations.

Maintenant pour mettre une queſtion en équation, c'eſt-à-dire, pour la réduire en différentes équations médiates, par le moyen deſquelles on puiſſe parvenir à une équation finale, la principale choſe à laquelle on doit faire attention, c'eſt d'exprimer toutes les conditions de la queſtion par autant d'équations. Pour y parvenir, il faut examiner ſi les propoſitions, ou mots dans leſquels la queſtion eſt exprimée, peuvent être rendus par des termes algébriques, comme nous rendons nos idées ordinaires en caractères grecs, latins ou français, &c. Si cela eſt ainſi, comme il arrive généralement dans toutes les queſtions que l'on fait ſur les nombres ou ſur les quantités abſtraites, en ce cas, il faut donner des noms aux quantités inconnues & connues, autant que la queſtion le demande, & traduire ainſi, en lan-

gage algébrique, le ſens de la queſtion. Ces conditions, ainſi traduites, donneront autant d'équations que le problême peut en fournir. Nous allons donner dans les deux articles ſuivans un grand nombre d'exemples de cette traduction d'une queſtion en langue algébrique.

Réſolution des équations du premier degré, avec une ſeule inconnue.

N. B. On appelle quelquefois *équations linéaires*, les équations du premier degré, parce que les inconnues qu'elles renferment, n'offrent qu'une ſeule dimenſion, comme les lignes de la Géométrie.

Une équation eſt réſolue quand on eſt parvenu à laiſſer toute ſeule dans un membre l'inconnue dont on cherche la valeur, & à n'avoir dans l'autre membre que des quantités connues. Alors en effet, le problême eſt réſolu, puiſqu'une

quantité égale à des quantités connues ceſſe d'être inconnue.

PROBLÊME I. *Un pere a ſix fois autant d'âge que ſon fils, & la ſomme des deux âges eſt de 91 ans. Quel eſt l'âge du fils? quel eſt celui du pere?*

Pendant que les Arithméticiens tâtonneront, l'Algébriſte dira..... J'appelle x l'âge du fils; donc par l'énoncé du problême, l'âge du pere ſera $6 \times x$, ou $6x$. Or ces deux âges réunis doivent faire 91 ans; donc $6x + x$, ou $7x = 91$; & voilà le problême *mis en équation.*

A préſent qu'il eſt, pour ainſi dire, traduit en langage algébrique, le reſte de la ſolution n'eſt qu'un jeu..... Si $7x = 91$, dira-t-on, donc $\frac{7x}{7} = \frac{91}{7}$, ou $x = \frac{91}{7}$, ou $x = 13$; & par conſéquent le fils a 13 ans. Le pere en a donc 78; & la preuve en eſt que $13 +$

$78 = 91$; ce qui ſatisfait à la condition du problême.

Concluons de cet exemple, que POUR DÉGAGER L'INCONNUE, *quand elle eſt affectée d'un coefficient quelconque, il faut diviſer toute l'équation par ce même coefficient.* Ainſi pour connoître la valeur de x dans l'équation ſuivante $ax = b$, on écrira $x = \frac{b}{a}$.

PROBLÊME II. *Quel eſt le nombre dont le tiers & le quart ajoutés enſemble font 63 ?*

Ce nombre m'eſt inconnu; mais quel qu'il ſoit, je l'appelle x. Son tiers eſt donc $\frac{1}{3}x$, ou $\frac{1x}{3}$, ou $\frac{x}{3}$, & ſon quart $\frac{x}{4}$. Ces deux parties réunies doivent faire 63. J'ai donc pour équation du problême... $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 63$.

Réduiſant au même dénominateur, & ajoutant les deux fractions, j'aurai... $\frac{7x}{12} = 63$. Le coefficient de l'inconnue ſera donc $\frac{7}{12}$, par leſquels je diviſerai les deux membres de l'équation, ſuivant la regle précédente : ce qui me donnera $\frac{7x}{12} : \frac{7}{12} = \frac{63}{1} : \frac{7}{12}$, ou..... $x = \frac{12.63}{7.1} = \frac{12.63}{7} = \frac{756}{7} = 108$. Effectivement le tiers de 108 eſt 36, le quart de 108 eſt 27; & $36 + 27 = 63$.

Concluons de cet exemple que toutes les équations de cette forme..... $\frac{ax}{b} = c$, ſe réſolvent en écrivant $x = \frac{bc}{a}$: c'eſt-à-dire, que *pour* DÉ-

GAGER UNE INCONNUE *affectée d'un coefficient fractionnaire, il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de ce coefficient, & les diviſer par ſon numérateur.*

PROBLÊME III. *On demande un nombre tel qu'en le diviſant par* 5, *on ait un quotient, qui ajouté au produit de ce méme nombre par* 4, *& au multiplicateur* 4, *faſſe* 12,5 ?

Si on appelle x le nombre demandé, on aura..... $\frac{x}{5} + 4x + 4 = 12,5$.

Multipliant tout par le dénominateur 5 pour faire diſparoître la fraction $\frac{x}{5}$, on aura.... $\frac{5x}{5} + 20x + 20 = 62,5$;

ou $x + 20x + 20 = 62,5$; d'où l'on titera $21x + 20 = 62,5$.

Or toutes les fois que deux quantités ſont égales, on peut ajouter ou ſouſ-

traire de part & d'autre une même quantité ; on peut tout multiplier ou tout diviſer par le même nombre ; on peut tout élever à une même puiſſance, ſans détruire l'égalité des deux membres de l'équation.

Je puis donc ſouſtraire 20, par exemple, de chacun de ces membres dans l'équation..... $21x + 20 = 62,5$, & dire..$21x + 20 - 20 = 62,5 - 20$, on en déduit.....$21x = 42,5$. Mais par la première régle on dégage l'inconnue de ſon coefficient.....

$x = \frac{42,5}{21}$; donc $x = 2 + \frac{1}{42} = \frac{85}{42}$; ce qui eut été un peu long à trouver par les tâtonnemens de l'Arithmétique. Voici la preuve de la ſolution du problême.....

$\left(\frac{85}{42} : 5\right) + \left(\frac{85}{42} \times 4\right) + 4 = 12,5.$

Il ſuit de la remarque précédente que *pour faire paſſer une quantité poſitive d'un membre dans un autre, on n'a qu'à effacer cette quantité dans le membre où elle eſt, & l'écrire dans l'autre membre avec le ſigne —.* Ainſi toute équation de cette forme.... $x+a=b$, ſe réduit à celle-ci..... $x=b-a$.

Et réciproquement *pour tranſporter d'un membre à l'autre une quantité négative, on l'effacera dans le membre où elle eſt, & on l'écrira dans l'autre membre avec le ſigne +.*

EXEMPLE..... $x-m=p$; donc $x=p+m$. En général, ſi on a.... $x\pm c=h$, on en conclura que $h\mp c=x$. Cette régle eſt d'un grand uſage.

Avec ce petit nombre de principes & d'opérations bien élémentaires, il n'y a point d'équation du premier degré qui ne ſe réſolve très-promptement. Prenons pour exemple un des cas les plus compliqués; & propoſons-nous de trou-

ver la valeur de l'inconnue x dans l'équation ſuivante.....

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n.$$

D'abord je vois que les deux membres contiennent une même quantité $\frac{cx}{f}$, affectée du même ſigne. L'égalité ſubſiſtera donc, après que l'on aura retranché de part & d'autre cette quantité (quand on trouve ainſi précédés du même ſigne des termes communs aux deux membres, il ne faut pas manquer de les effacer). On n'aura donc plus à réſoudre que l'équation,

$$\frac{ax}{b} + m = px + n.$$

Je vois enſuite que pour laiſſer x toute ſeule dans un membre, il faut que je tranſporte du même côté les quantités connues, & que l'autre membre

ſoit formé ſeulement des termes qui contiennent x. La régle des tranſpoſitions obſervée me donne

$$\frac{ax}{b} - px = n - m.$$

Remarque. Quelquefois on eſt embarraſſé pour ſavoir dans quel ſens on fera ces ſortes de tranſpoſitions : ici, par exemple, il n'y a pas plus de raiſon pour tranſpoſer le terme px dans le premier membre, que le terme $\frac{ax}{b}$ dans le ſecond. Cela dépend uniquement de celui qui réſoud le problême. La valeur de l'inconnue eſt la même dans les deux cas. Seulement elle eſt poſitive dans l'un, & négative dans l'autre.

A préſent que l'équation eſt tranſpoſée, il ne reſte plus qu'à dégager l'inconnue ; & pour cela je multiplie tout par le dénominateur b, ce qui me donne,

$$ax - bpx = bn - bm,$$

ou $(a - bp)x = (n - m)b.$

A cette nouvelle préparation, j'en fais ſuccéder une autre, qui eſt celle de la diviſion de toute l'équation par le coefficient de l'inconnue. Ce coefficient eſt $a - bp$; j'ai donc enfin,

$$x = \frac{(n-m)b}{a-bp}.$$

PROBLÊME IV. *A la ſuite d'une inondation, il eſt tombé dans un même jour la moitié des maiſons d'une ville; il en eſt tombé le tiers le lendemain, & le douzième dans les jours ſuivans; on n'en compte plus que 63 ſur pied. De combien de maiſons cette ville étoit-elle compoſée avant l'inondation?*

Soit x le nombre cherché; $\frac{x}{2}$ ſera l'expreſſion du nombre des bâtimens écroulés le premier jour: $\frac{x}{3}$ & $\frac{x}{12}$

exprimeront combien il en eſt tombé dans les jours ſuivans ; l'équation du problême ſera donc :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 63 = x.$$

Suppoſons, pour abréger, que $63 = a$, & que l'on multiplie toute l'équation par le plus grand dénominateur qui eſt ici 12. On aura d'abord.....

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + a = x.....$$

puis $\frac{12x}{2} + \frac{12x}{3} + x + 12a =$

$12x$.....

$$6x + 4x + x + 12a = 12x.$$

Réduiſant.....$11x + 12a = 12x.$

Retranchant de part & d'autre la quantité commune $11x$, il reſtera pour ſolution du problême.....

$12a = 12x - 11x$....$12a = x$.....

$12.63 = x$....$756 = x$.

Cette ville renfermoit donc dans ſon enceinte 756 maiſons.

PROBLÊME V. *Trois amis, que nous déſignerons l'un par* B, *l'autre par* C, *& le troiſième par* D, *ont pris en commun des billets de Loterie. La miſe de* B *jointe à celle de* C, *eſt de* 21^{tt}. *Ce que* B *&* D *ont mis d'argent fait* 24^{tt}. *Les deux miſes de* C *&* D *font* 27^{tt}. *Quelle eſt la miſe de chacun ?*

On exprime d'abord les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet.....$a=21$.....$e=24$..... $f=27$; enſuite par x la miſe de B. La miſe de C eſt $a-x$; & celle de D eſt $e-x$. Or l'énoncé du problême porte que ces deux dernières miſes font 27^{tt}. Donc....$a-x+e-x=f$, ou $a+e-2x=f$.. ou $a+e-f=2x$.. ou $x=\frac{a+e-f}{2}$..... ce qui donne.....$x=9^{\text{tt}}$, miſe de B..... $a-x=12^{\text{tt}}$,

$a - x = 12^{tt}$, miſe de C.....
$e - x = 15^{tt}$, miſe de D.

Remarque. Au premier apperçu de ce problême, il paroiſſoit indiſpenſable de regarder les trois miſes comme trois inconnues différentes : mais en y regardant de plus près, on a dû voir qu'une ſeule de ces miſes étant déterminée, elle rendoit les deux autres déterminées comme elle. D'où on conclut *que le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des queſtions particulières que l'énoncé d'un problême renferme, mais du degré de liaiſon qui exiſte entre les conditions du problême propoſé.*

Ce n'eſt pas, au reſte, que l'on ne fût parvenu à la ſolution du problême, en introduiſant trois inconnues dans le calcul. On en verra la preuve dans les problêmes ſuivans. Mais en général il faut toujours tendre aux ſolutions les plus ſimples ; & c'eſt le tact particulier

de chaque Algébriſte qui lui fera découvrir la voie qui mène à ces ſolutions. Les livres & les Maîtres peuvent donner ſeulement la ſagacité néceſſaire pour démêler dans un problême ce qui en eſt le principe & ce qui en eſt l'acceſſoire. Les exemples multipliés forment le tact du calculateur ; c'eſt pourquoi nous en donnerons encore pluſieurs.

PROBLÊME VI. *Par le teſtament d'un pere, ſon fils aîné doit prélever d'abord* 1000 *écus ſur la maſſe des biens, puis prendre le ſixième de ce qui reſtera. La part du ſecond doit être formée de* 2000 *écus, & du ſixième de ce qui reſtera. La part du troiſième doit être compoſée de* 3000 *écus & du ſixième de ce qui reſtera.... Ainſi de ſuite juſqu'au dernier dont la part ſera le reſte de celle de ſes frères. On exécute les diſpoſitions du teſtament, & le partage des enfans ſe trouve égal..... On demande d'après cela,* 1°. *Quel eſt le*

bien du pere ?.... 2°. Combien il y a d'enfans ?..... 3°. Quelle eſt la part de chacun ?

Ce problême paroît au premier coup-d'œil renfermer trois inconnues. Cependant on voit 1°. que ſi le bien du pere étoit connu, tout le reſte le ſeroit... 2°. Que la part du fils aîné eſt 1000 écus, plus le ſixième du bien du pere diminué de ces 1000 écus....3°. Que toutes les parts étant égales, en diviſant le bien du pere par la part de l'aîné, on aura pour quotient le nombre des parts.. Cela poſé, il faut s'occuper uniquement de la recherche du bien du pere, que l'on appelle x ; a ſera $=1000$.

L'aîné ayant pris 1000 écus, ou a ſur ce bien, le reſte du bien ſera $x-a$; ainſi la part totale de cet aîné ſera $a+\frac{x-a}{6}$, ou par la réduction en une ſeule fraction $\frac{6a+x-a}{6}$, ou.....

$\frac{5a+x}{6}$. Les parts étant égales on mettra en équation avec celle de l'aîné la part du ſecond.

Pour trouver la part du ſecond, il faut d'abord retrancher du bien du pere la part de l'aîné; par cette ſouſtraction le bien du pere devient.....

$$x-\left(\frac{5a+x}{6}\right)=x-\frac{5a-x}{6}=$$

$$\frac{6x-5a-x}{6}=\frac{5x-5a}{6}.$$ Cherchons ſur ce reſte la part du ſecond; c'eſt, 1°. 2000 écus ou $2a$; 2°. le ſixième du reſte. Ce reſte eſt $\frac{5x-5a}{6}-2a=\frac{5x-5a-12a}{6}=\frac{5x-17a}{6}$.

La part totale du ſecond compoſée de $2a$ & du ſixième du reſte, eſt donc

$2a+\frac{1}{6}\left(\frac{5x-17a}{6}\right)=2a+\ldots\ldots$

$\frac{5x-17a}{36}=\frac{72a+5x-17a}{36}=\frac{55a+5x}{36}$.

L'équation du problême renfermant les parts égales de l'aîné & du ſecond fils, ſera donc $\ldots\ldots\ldots\frac{5a+x}{6}=\frac{55a+5x}{36}$. Cette équation étant du premier degré, & ne renfermant qu'une inconnue, donne par des dégagemens ſucceſſifs la valeur de cette inconnue. Pour délivrer de fraction le premier membre, on multipliera le numérateur du ſecond par 6 dénominateur du premier $\ldots\ldots 5a+x=\frac{330a+30x}{36}$. On délivrera par une opération ſem-

blable le ſecond membre..... $180a + 36x = 330a + 30x$. Tranſpoſant tous les termes, renfermant x dans le premier membre..... $36x - 30x = 330a - 180a$..... $6x = 150a$..... Délivrant x de ſon coefficient..... $x = \frac{150}{6}a$..... $x = 25a$..... ſubſtituant la valeur de a.... le bien du pere, ou $x = 25000$ écus.

Le bien du pere étant de 25000 écus, la part de chaque fils eſt de 5000 écus, & les fils étoient cinq.

PROBLÊME VII. A & B *ſe ſont mis au jeu, ayant autant d'argent l'un que l'autre. Ils en ont perdu une partie;* A *a perdu* 12^{tt}; B *a perdu* 57^{tt}, *de ſorte qu'après ces deux pertes,* B *n'a plus que le quart de l'argent qui reſte à* A; *combien avoient-ils avant le jeu?*

Ils avoient chacun x de livres; ainſi

après le jeu, A n'a plus que $x - 12$; B de même n'a plus que $x - 57$. Mais par l'énoncé du problême..... $x - 57 = \frac{1}{4}(x - 12)$.....Donc

$$x - 57 = \frac{x}{4} - \frac{12}{4} \text{.....}$$

$$x - 57 = \frac{x}{4} - 3 \text{.....}$$

$$x - \frac{x}{4} = 57 - 3 \text{...} \frac{3}{4} x = 54 \text{....}$$

$3x = 216$....$x = 72^{\text{th}}$.

Problême VIII. *Quel eſt le nombre dont le tiers & le cinquième différent entr'eux de* 8?

Soit x ce nombre.....on a.... $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = 8$. Réduiſant les deux fractions au même dénominateur, & effectuant la ſouſtraction.... $\frac{2}{15}x = 8$..... $2x = 120$...$x = 60$. En effet, le tiers de 60 eſt 20, le cinquième de 60 eſt 12, & $20 - 12 = 8$.

La manière la plus élégante de ré-

ſoudre ce problême, & la plus utile à cauſe de ſa généralité, auroit été d'exprimer en lettres toutes les connues de cette ſorte.. $8 = a$..... $\frac{1}{3} = \frac{1}{m}$.....

$\frac{1}{5} = \frac{1}{n}$....ce qui auroit donné.....

$\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = a$....$x = \frac{amn}{n-m}$.....

& en ſubſtituant les valeurs.....

$x = \frac{8.3.5}{5-3}$.....$x = 60$.

PROBLÊME IX. *Après avoir diviſé un nombre par 6, le quotient s'eſt trouvé tel qu'en l'ajoutant avec le diviſeur & le dividende, on a eu pour ſomme totale 69. Quel eſt ce nombre?*

Soit le nombre cherché $= x$..... $6 = a$....$69 = b$.... on a pour l'équation du problême $\frac{x}{a} + a + x = b$...

$x + \frac{x}{a} = b - a$.....

$ax + x = (b - a)a$.....

$x(a + 1) = (b - a)a$.....

$x = \frac{(b - a)a}{a + 1}$..... ſubſtituant les valeurs.....$x = \frac{(69 - 6)6}{7}$.....

$x = 54$.

Réſolution des équations du premier degré, avec pluſieurs inconnues.

PROBLÊME X. *La ſomme & la différence de deux quantités, trouver chacune de ces quantités?*

Soient y la plus petite des quantités, x la plus grande.....a la ſomme.... b la différence. L'énoncé du problême donne les deux équations ſuivantes:

$$x + y = a \text{.....} x - y = b.$$

Si l'on prend la valeur de x.....

1°. dans la première équation, on aura $x = a - y$. 2°. Dans la ſeconde, on aura ....$x = b + y$, ces deux valeurs de x étant égales, on en forme une nouvelle équation....$a - y = b + y$... qui ne renfermant qu'une ſeule inconnue, donne ſa valeur...$a - b = 2y$..

$$y = \frac{a - b}{2} = \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

La valeur de y étant connue, on trouvera celle de x, par le moyen de l'équation $x = a - y$, en y ſubſtituant la valeur de y, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}(a - b)$. L'équation devient $x = a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, ou $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

C'eſt ici où l'on reconnoîtra le grand avantage de l'Algebre, d'offrir une vérité générale ſous la forme d'une expreſſion particulière. Les valeurs de x & de y nous apprennent que *connoiſſant la ſomme & la différence de deux quantités, on trouvera toujours*, 1°. *la*

plus grande, en ajoutant la moitié de la ſomme à la moitié de la différence; 2°. la plus petite, en retranchant la moitié de la différence de la moitié de la ſomme. La Géométrie nous offrira pluſieurs occaſions d'appliquer cette obſervation ; nous allons ſur le champ l'appliquer à des problémes numériques.

Applications. 1°. *Deux frères ont 57 ans à eux deux; l'aîné a 7 ans de plus que le cadet. Quel eſt l'âge de chacun ?*

La moitié de la ſomme eſt $28\frac{1}{2}$; la moitié de la différence eſt $3\frac{1}{2}$. L'aîné a donc $28\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$, ou 32 ans; & le cadet $28\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$, ou 25 ans.

2°. *Une maiſon compoſée de deux étages a 35 pieds de haut. Le premier étage eſt de 4 pieds plus élevé que le ſecond. Quelle eſt la hauteur des deux étages ?*

La demi-ſomme $= 17\frac{1}{2}$, la demi-différence $= 2$; ainſi le premier étage

$= 17\frac{1}{2} + 2$, ou $= 19\frac{1}{2}$ pieds; & le ſecond $17\frac{1}{2} - 2$, ou $= 15\frac{1}{2}$ pieds.

Remarque. Au lieu de réſoudre ce *Problême X* en comparant les deux valeurs de x, on eût pu, 1°. ajouter les deux équations du problême, & n'en faire qu'une ſeule, de cette ſorte:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right\} \begin{array}{l} .\,.x+y+x-y=a+b, \\ \qquad 2x=a+b. \end{array}$$

Ce qui fait trouver tout de ſuite la valeur de x..$x=\frac{1}{2}(a+b)$. On eût pu, 2°. ſouſtraire la ſeconde équation de la première,

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right\} \begin{array}{l} .\,x+y-x+y=a-b, \\ \qquad 2y=a-b. \end{array}$$

La valeur de y auroit été trouvée par la même promptitude..$y=\frac{1}{2}(a-b)$.. Mais ces méthodes abrégées ne trouvent pas toujours leur application avec autant de facilité; c'eſt à la ſagacité du calculateur à faire le choix de celle qui convient le mieux à ſon problême.

Nous

Nous allons employer la ſouſtraction pour réſoudre de nouveau le *problême I*, en y introduiſant deux inconnues.... *Un pere*, y diſoit-on, *a ſix fois autant d'âge que ſon fils, & la ſomme des deux âges fait* 91 *ans.* Soient x l'âge du pere.....y l'âge du fils, on aura les deux équations du problême,

$$x = 6y \ldots\ldots x + y = 91.$$

Par la ſouſtraction de la première équation, on aura..$x + y - x = 91 - 6y$.. $y = 91 - 6y$..$6y + y = 91$..$7y = 91$ $y = \frac{91}{7}$..$y = 13$..donc $x = 78$, comme nous l'avions trouvé par la première méthode, qui eſt toujours préférable lorſqu'on peut l'employer.

Elimination des inconnues.

La première opération de celui qui réſout un problême à pluſieurs inconnues, doit être la réduction ſucceſſive de toutes ces inconnues à une ſeule dont

il cherchera enſuite la valeur par les moyens expoſés ci-devant. On ſe ſert dans ce cas du mot *éliminer*, pour exprimer l'excluſion que l'on donne à chaque inconnue, ſauf la dernière.

Cette *élimination* ſe fait en prenant d'abord la valeur d'une même inconnue dans deux équations différentes, & en égalant ces deux valeurs, pour avoir en y, par exemple, la valeur de x. C'eſt ainſi qu'après avoir trouvé dans le dernier problême..... $x+y=a$..... $x-y=b$..... on a conclu..... $x=a-y$..... $x=b+y$..... & puis.... $a-y=b+y$.

On peut auſſi, après avoir pris la valeur d'une inconnue, ſubſtituer cette valeur dans toutes les équations qui renferment cette inconnue : cette opération *élimine* de même l'inconnue.

L'élimination des inconnues ſe pratiquant juſqu'à ce que l'on arrive à une équation formée toute entière de con-

nues avec une ſeule inconnue ; il eſt évident qu'on ne peut la pouſſer juſqu'au bout, ſi l'on n'a pas autant d'équations que d'inconnues. En effet, ſi l'on ſe propoſe de trouver deux quantités x, y, dont on ne connoît que la ſomme a ; la condition unique du problême exprimée par l'équation $x + y = a$, ne permet pas d'éliminer aucune des deux inconnues. Si l'on prend la valeur de x, par exemple, en la laiſſant ſeule dans un membre ..... $x = a - y$, on n'apprend autre choſe, ſinon qu'elle eſt égale à une quantité $a - y$, auſſi inconnue qu'elle. Ces ſortes de problêmes, dans leſquels il y a plus d'inconnues que de conditions, s'appellent des *problêmes indéterminés*. Nous en parlerons dans la ſuite.

PROBLÊME XI. *Une perſonne ayant des jetons dans ſes deux mains, en prend un de la droite pour l'ajouter à ceux de la gauche ; & par-là il s'en*

trouve autant dans une main que dans l'autre. Si la même perſonne eût fait paſſer deux jetons de la gauche dans la droite, cette dernière main eût contenu le double des jetons qui ſeroient reſtés dans la gauche. On demande combien de jetons il y avoit d'abord dans chaque main ?

Soient x le nombre des jetons que renfermoit la main droite, y le nombre de ceux de la gauche. La première & la ſeconde condition donneront les deux équations ſuivantes :

$$x-1=y+1 \ldots . x+2=2(y-2).$$

On pourroit prendre dans la première équation la valeur de x, & la ſubſtituer dans la ſeconde, pour n'avoir plus que y à évaluer : mais il eſt plus court de ſouſtraire cette première équation de la ſeconde :

$$x+2-x+1=2y-4-y-1,$$
$$3=y-5 \ldots . 8=y;$$

& par conſéquent $x = 10$. Ces deux nombres ſatisfont aux conditions du problême.

PROBLÊME XII. *Un Orfévre a fait payer* 318^{tt} *pour* 3 *onces d'or & 5 onces d'argent. Il a fait payer auſſi* 522^{tt} *pour* 5 *onces d'or & 7 onces d'argent. A quel prix eſt l'once d'or? A quel prix eſt l'once d'argent?*

Soient x & y les valeurs cherchées, $a = 318 \ldots b = 522$. Les deux conditions du problême donneront les deux équations ſuivantes :

$$3x + 5y = a \ldots . 5x + 7y = b.$$

A cauſe des coefficiens différens qui affectent les mêmes inconnues dans les deux équations, on ne peut en éliminer aucune par la ſeule addition ou ſouſtraction des deux équations, comme nous l'avons pratiqué ci-deſſus. Il faut donc tâcher de donner dans ces deux équations un même coefficient à l'une

des deux inconnues, pour pouvoir enſuite l'éliminer par cette voie. Or pour cela il ſuffit de multiplier la première équation par le coéfficient dont eſt affectée cette inconnue dans la ſeconde équation, & de multiplier enſuite la ſeconde équation par le coefficient dont la méme inconnue eſt affectée dans la première équation.

Veut-on éliminer x des deux équations précédentes, on multiplie la première par 5 (coefficient de x dans la ſeconde), & la ſeconde par 3 (coefficient de x dans la première) les produits ſont :

$$15x+25y=5a \ldots 15x+21y=3b.$$

En retranchant la ſeconde de la première, on a.....

$$15x+25y-15x-21y=5a-3b,$$

$$4y=5a-3b \ldots y=\frac{5a-3b}{4}\ldots$$

$$y = \frac{1590 - 1566}{4} \ldots . y = 6^{\text{tt}} \ldots .$$

& $x = 96^{\text{tt}}$. Ces deux prix rempliſſent les conditions du problême.

Pour réſoudre ces ſortes de problêmes avec toute la généralité dont ils ſont ſuſceptibles, nous exprimerons toutes les quantités du problême par des lettres,

$$px + qy = a \ldots . mx + ny = b.$$

En multipliant, comme ci-deſſus, la première équation par m, & la ſeconde par p, nous aurons

$$mpx + mqy = am,$$
$$mpx + npy = bp.$$

En ſouſtrayant la ſeconde de la première, il viendra,

$$mpx + mqy - mpx - npy = am - bp,$$
$$y(mq - np) = am - bp \ldots \ldots .$$
$$y = \frac{am - bp}{mq - np} \ldots . \text{En ſubſtituant}$$

cette valeur de y dans la première équation, on a $x = \frac{bq - an}{mq - np}$.

Si l'on donne aux lettres m, n, p, q les valeurs reſpectives qu'elles ont dans l'énoncé du dernier problême, on verra que x & y ſeront reſpectivement 96^{tt} & 6^{tt}, comme ci-deſſus. Il y aura même cette facilité de plus qu'en variant tant que l'on voudra les valeurs des données, on n'aura que de ſimples ſubſtitutions à faire dans les formules de x & de y, pour réſoudre tous les problêmes analogues à celui-là. Voilà pourquoi les ſolutions générales ſont préférables, à tous égards, aux ſolutions particulières. C'eſt toujours la même ſupériorité de l'Algebre ſur l'Arithmétique.

PROBLÊME XIII. *On a acheté trois chevaux dont les prix réunis ſont tels que le prix du premier, plus la moitié du prix du ſecond & du troiſième, ſont 25*

louis. Le prix du ſecond, plus le tiers du prix des deux autres ſont 26 louis, Enfin le prix du troiſième, plus la moitié du prix des deux autres ſont 29 louis. Quel eſt le prix de chaque cheval?

Soient x, y & z les trois prix demandés; on aura pour les trois équations du problême,

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25,$$

$$y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26,$$

$$z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29.$$

Faiſant diſparoître les fractions, éliminant ſucceſſivement x & y, on parviendroit à une équation qui donneroit la valeur de z. Cette voie, qui d'ailleurs a l'avantage d'être applicable à tous les cas d'élimination, eſt plus longue

que la voie par laquelle nous allons conduire nos Calculateurs.

D'abord, pour éviter les fractions, donnons pour coefficient arbitraire aux trois inconnues un nombre dont on puiſſe prendre la moitié ou le tiers ſans fraction, tel que 6. Soient donc $6x$ le prix du premier cheval.... $6y$ le prix du ſecond.....& $6z$ le prix du troiſième. Soient enſuite, pour abréger le calcul, $a = 25 \ldots . b = 26 \ldots . c = 29$.

Cela poſé, on aura les équations ſuivantes,

$$\text{I.}\quad 6x + 3y + 3z = a,$$
$$\text{II.}\quad 6y + 2x + 2z = b,$$
$$\text{III.}\quad 6z + 3x + 3y = a,$$

Or ſi on ajoute la première à la troiſième, on aura

$$\text{IV.}\quad 9x + 6y + 9z = a + c.$$

Et ſi l'on multiplie cette dernière équation par 2 (coefficient de x & de z dans l'équation II) il viendra

V. $18x + 12y + 18z = 2a + 2c$.

Comparant ce réſultat au produit de l'équation II multipliée par 9 (coefficient des mêmes inconnues x & z dans l'équation IV), c'eſt-à-dire, à..... $54y + 18x + 18z = 9b$, on verra que ces deux inconnues y ſont affectées du même coefficient. Donc en ſouſtrayant l'équation V de celle-ci, les deux inconnues ſeront éliminées du même coup. Souſtraction faite, il reſtera

VI. $42y = 9b - 2a - 2c$.

D'où l'on tire tout de ſuite,

$$6y = \frac{9b - 2a - 2c}{7} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{234 - 50 - 58}{7} = 18 \text{ louis.}$$

C'eſt le prix du ſecond cheval.

Pour avoir le prix du premier, on ſubſtitue la valeur de y dans les équations I & II, ce qui les change en celles-ci :

$$6x + 9 + 3z = a,$$

$$2x + 18 + 2z = b.$$

Multipliant la première par 2, & la seconde par 3 (coefficiens respectifs de z), on aura

$$12x + 18 + 6z = 2a,$$

$$6x + 54 + 6z = 3b.$$

Soustrayant la seconde de la première, on obtient... $6x - 36 = 2a - 3b$... $6x = 2a - 3b + 36 = 8$ louis, prix du premier cheval.... $6z = 16$ louis, prix du troisième cheval. Ces trois nombres 8, 18 & 16, satisfont aux trois conditions du problême, & sont même les seuls qui puissent y satisfaire.

Remarque. La résolution du problême V, où il s'agissoit de trois mises, sembloit exiger trois inconnues, comme ce XIIIe problême. Dans le fait, on en seroit venu à bout très-facilement par cette méthode, si la première que

nous y avons ſuivie n'eût pas été encore plus facile. Voici comme on l'auroit réſolu avec trois inconnues.

Soient x, y, z les miſes reſpectives des trois amis,...$a=21$...$e=24$... $f=27$, comme ci-deſſus. On aura par les trois conditions du problême, $x+y=a$...$x+z=e$...$y+z=f$. Prenant dans la première équation $x=a-y$, & ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde équation pour éliminer x, on trouvera

$$a-y+z=e.$$

On pourroit enſuite prendre dans ce dernier réſultat la valeur de y, & la ſubſtituer dans la troiſième équation du problême : mais il eſt plus ſimple d'ajouter cette équation, $y+z=f$, à celle que l'on vient de trouver..... $a-y+z=e$. Par cette addition l'inconnue y eſt éliminée, & il reſte $a+2z=f+e$; d'où l'on tire.....

tire $z = \frac{f+e-a}{2} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{27+24-21}{2} = 15^{\text{tt}}.$

Cette valeur de z ſubſtituée dans la ſeconde équation du problême, donne $x+15=e \ldots x=e-15 \ldots x=9^{\text{tt}}$. La ſubſtitution de la valeur de x dans l'équation $x+y=a$, ou celle de la valeur de z dans l'équation $y+z=f$, donne auſſi-tôt $y=12^{\text{tt}}$.

Problêmes du premier degré à réſoudre.

N. B. Les ſolutions de ces problêmes ſe trouvent à la fin de ce volume.

PROBLÊME A. On demande à un homme combien il a d'écus ? Il répond ſi vous ajoutez enſemble la moitié, le tiers, & le quart de ce que j'en ai, la ſomme ſurpaſſera de 1 le nombre que vous demandez.

PROBLÊME B. Un père a 50 ans ; ſon

fils en a 12. Quand eſt-ce que l'âge du père ne ſera que le triple de celui du fils ?

PROBLÊME C. Une perſonne charitable voulut un jour faire l'aumône à pluſieurs pauvres, & donner également à tous. D'abord elle avoit projetté de donner 3 ſous à chacun, mais il lui auroit fallu 9 ſous de plus : elle ne leur en donna donc que 2, & il lui en reſta 2. Combien y avoit-il de pauvres ? Combien cette perſonne avoit-elle de ſous ?

PROBLÊME D. Un ouvrier n'avoit plus que 6^{tt} lorqu'on lui paya cinq ſemaines de travail. Quinze jours après il avoit déjà dépenſé les trois quarts de tout ſon argent : mais ayant reçu le prix de ſon travail pour ces quinze jours, il ſe trouva avoir 21^{tt}. Que gagnoit-il par ſemaine ?

PROBLÊME E. Le teſtament d'un oncle porte que chacun de ſes neveux aura 12000^{tt}, & chacune de ſes nièces 9000^{tt}

ſur la ſomme de 120000^{tt} qu'il leur laiſſe après ſa mort. Par cette diſpoſition, il ne reſte rien de cette ſomme. Si au contraire chaque nièce eut eû 12000^{tt}, & chaque neveu 9000^{tt}, il ſeroit reſté 9000^{tt}. On demande le nombre des neveux & des nièces?

Problême F. Un chaſſeur promet à un autre de lui donner une ſomme b, toutes les fois qu'il manquera une pièce de gibier. Cet autre à ſon tour s'engage à payer une ſomme c, toutes les fois qu'il la tuera. Après un nombres n de coups de fuſil, il peut arriver, ou que les deux chaſſeurs ne ſe doivent rien, ou que le premier ſoit redevable au ſecond, ou le ſecond au premier d'une quantité d. On demande une formule qui faſſe connoître dans les trois cas combien il y a eu de coups manqués?

Problême G. Une perſonne ayant doublé au jeu l'argent qu'elle avoit

avant que de jouer, donne un louis à ſes domeſtiques. Gagnant une ſeconde fois de quoi doubler l'argent qui lui reſte, elle met un louis à la loterie qui ne lui rapporte rien. Entrant au jeu pour la troiſième fois, & doublant ſon argent, elle ne ſe trouve plus avoir qu'un louis dans ſa poche. Combien avoit-elle d'argent d'abord ?

PROBLÊME H. *A*, *B* & *C* ont chacun un certain nombre d'écus que l'on ne connoît pas ; tout ce que l'on en ſait ſe réduit à ceci. *A* diſtribuant de ſes écus à *B* & à *C*, a doublé les nombres reſpectifs qu'ils en avoient déjà. *B* diſtribuant à ſon tour les ſiens, a doublé ceux qui reſtoient entre les mains de *A*, & ceux que *C* avoit alors. Enfin *C* a doublé de même ceux que *A* & *B* avoient au moment de ſa diſtribution : & tout cela fait, chacun s'eſt trouvé en avoir 16. Combien en avoient-ils en commençant ?

PROBLÊME I. Deux courriers ſont partis au même inſtant, l'un de Paris pour Fontainebleau, l'autre de Fontainebleau pour Paris. Leurs vîteſſes ſont dans le rapport de 3 à 4; on demande où ils ſe rencontreront, la diſtance des deux points de départ étant ſuppoſée de 14 lieues. Généraliſer le problême.

Réſolution des équations du ſecond degré.

Toute équation du ſecond degré peut être repréſentée par cette formule ſimple.....$x^2 + px = q$, dans laquelle p & q expriment des quantités connues. ($x^2 = q$, rentre dans cette formule, en ſuppoſant $p = 0$; parce que le zéro fait évanouir les termes dont il eſt multiplicateur). Ainſi la réſolution de cette équation donnera la réſolution de toutes les équations du ſecond degré.

Or il eſt évident, 1°. que ſi $p = 0$, l'équation ſe réduiſant à celle-ci..... $x^2 = q$, auroit pour racines..... $\pm x = \sqrt{q}$.... & par tranſpoſition... $x = \pm\sqrt{q}$. Le radical eſt affecté du double ſigne, à cauſe de la double valeur qui en réſulte pour l'inconnue. 2°. Si p a une valeur, il faut extraire la racine quarrée de l'équation..... $x^2 + px = q$.

Dans le premier cas, c'eſt l'extraction des racines numériques.

Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, lorſque p eſt une quantité réelle, il faut pour pouvoir extraire la racine de l'inconnue, *completter le quarré du membre de l'équation où elle ſe trouve*, comme nous l'avons enſeigné dans l'*Extraction des Racines*. On doit, pour conſerver l'égalité, ajouter à l'autre membre la même quantité qui a été ajoutée au premier pour completter le quarré. Ainſi, dans l'équation générale

$x^2 + px = q$, on ajoute au premier membre $\frac{1}{4}p^2$ pour completter le quarré, & $\frac{1}{4}p^2$ au ſecond membre pour conſerver l'égalité : ce qui donne

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2.$$

Maintenant, lorſque deux quantités ſont égales, leurs racines de même nom le ſont auſſi; donc les racines quarrées des deux membres d'une équation ſont égales auſſi; donc.....

$\sqrt{(x^2 + px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$,

& par conſéquent.....

$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.....

d'où l'on tire par tranſpoſition la *formule générale de la racine quarrée*,

$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Toutes les fois que la quantité repréſentée par q, ſera poſitive, le radical affectera une quantité poſitive; puiſque $\frac{1}{4}p^2$ eſt néceſſairement poſitif. Ainſi de deux choſes l'une, ou la ſubſtitution des valeurs de q & de $\frac{1}{4}p^2$ produira un nombre quarré, & alors la

quantité ſoumiſe au radical ſera commenſurable ; ou cette ſubſtitution donnera un nombre qui ne ſera point ſuſceptible d'extraction de racine quarrée exacte, & dans ce cas la quantité radicale ſera incommenſurable ; alors on ne pourra l'avoir que par approximation : mais elle ſera *réelle* dans les deux cas.

L'ambiguité du ſigne $\pm$ fait voir que cette quantité radicale *réelle* peut ſe prendre également en $+$ & en $-$. Il en réſulte donc deux valeurs différentes pour x ; & comme en général les valeurs de l'inconnue s'appellent *les racines de l'équation*, on doit conclure que *toute équation du ſecond degré a deux racines*. L'une eſt..... $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$; l'autre... $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Ces racines ne ſont pas toujours *réelles* ; ſouvent elles ſont *imaginaires* : or voici ce qu'on entend par des quantités *imaginaires*.

Supposons que sous le signe radical qui affecte $q + \frac{1}{4}p^2$, la quantité q soit négative. Cette supposition ne peut avoir que trois résultats. Le premier que la quantité q soit moindre que $\frac{1}{4}p^2$; alors le positif l'emportera sur le négatif, & le reste de la soustraction sera réel.

Le second résultat est celui où la quantité négative q seroit égale à la quantité positive $\frac{1}{4}p^2$. Alors le radical disparoîtroit, & la double valeur de x se réduiroit à $-\frac{1}{2}p$; c'est-à-dire, que les deux racines de l'équation..... $x^2 + px = q$ seroient égales. Nous retrouverons l'occasion de parler de ces sortes de racines.

Enfin, le troisième résultat est celui où q étant négatif, seroit en même-tems plus grand que $\frac{1}{4}p^2$. Alors la quantité négative surpassant la quantité positive, le reste seroit négatif. Le signe radical affecteroit donc une quantité négative.

Or *la racine quarrée d'une quantité négative eſt imaginaire*, c'eſt-à-dire, qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une quantité qui multipliée par elle-même, donne un produit négatif. En effet, ou cette quantité ſeroit poſitive, ou elle ſeroit négative; il n'y a pas de milieu. Or dans les deux cas, ſon quarré doit être poſitif; donc la racine quarrée d'une quantité négative eſt impoſſible. Ainſi $\sqrt{-1}\ldots\sqrt{-2}\ldots\sqrt{-9}\ldots\sqrt{-a}\ldots\sqrt{-b^2}\ldots\sqrt{-(p^2+q^2)}$ ſont autant de quantités chimériques, ou comme l'on dit ordinairement, toutes ces quantités ſont autant *d'imaginaires*. Au reſte, l'uſage des imaginaires eſt fort étendu dans les calculs algébriques.

Après avoir parcouru tous les cas de la réſolution générale des équations du ſecond degré, il nous reſte à en donner quelques applications; c'eſt ce que nous allons faire dans les problêmes ſuivans.

PROBLÊME I. *Trouver un nombre tel, qu'en ajoutant ſept fois ce nombre à ſon quarré, la ſomme ſoit* 144?

J'appelle x le nombre demandé; ſon quarré ſera donc x^2, & la condition du problême ſera exprimée par l'équation

$$x^2 + 7x = 144.$$

Complettant le quarré, j'aurai.....

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4};$$

d'où en extrayant la racine quarrée, & tranſpoſant, je tirerai

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(144 + \frac{49}{4})}.$$

Après quoi, réduiſant au même dénominateur la quantité qui eſt ſous le ſigne radical, je trouverai

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(\frac{625}{4})}.$$

Or la racine quarrée de $\frac{625}{4}$ eſt $\frac{25}{2}$. Donc $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}$. Si on prend le ſigne ſupérieur $+$, on aura..... $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$. Si on prend le ſigne

ſigne inférieur, on aura $x = -16$. Ainſi le problême dont il s'agit pourra être réſolu de deux manières ; & en effet, ſi au quarré de 9 qui eſt 81, on ajoute 7 fois 9 ou 63, la ſomme ſera 144 ; comme auſſi en prenant le quarré de -16, qui eſt 256, & ajoutant ſept fois le nombre -16 (ou plutôt ſouſtrayant ſept fois 16) on trouvera 144. Voilà un exemple de la double ſolution dont les équations du ſecond degré ſont ſuſceptibles.

Au lieu de faire tout au long le calcul de ce problême, je n'avois qu'à comparer ſon équation, $x^2 + 7x = 144$, avec l'équation générale $x^2 + px = q$. J'aurois eu $p = 7 \ldots\ldots q = 144$; & ſubſtituant ces valeurs dans la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm (q + \frac{1}{4}p^2)$, j'aurois trouvé tout de ſuite $x = 9$ & $x = -16$. Il eſt bon de s'accoutumer à ces ſortes de comparaiſons.

PROBLÊME II. *Trouver un nombre*

tel qu'en ſouſtrayant 2 *de ſon quarré, le reſte ſoit* 1.

Si on ne s'appercevoit pas d'abord que cela eſt impoſſible, le calcul ne tarderoit pas à en faire ſentir l'impoſſibilité. Commençons par mettre le problême en équation.

Soit x le nombre cherché, & nous aurons $x^2 - 2 = 1$; d'où en tranſpoſant nous conclurons $x^2 = 3$, & en extrayant... $x = \pm \sqrt{3}$.

C'eſt donc la racine quarrée de 3 qui, priſe ſoit en +, ſoit en —, ſatisferoit à la condition du problême, & donneroit les deux ſolutions. Or on ſait que cette racine eſt inaſſignable.

Pour rapporter cet exemple à la formule $x^2 + px = q$, il faudroit faire $p = 0 \ldots q = 3$, & alors l'équation.. $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ donneroit par les ſubſtitutions convenables..... $x = \pm \sqrt{3}$, comme ci-deſſus.

PROBLÊME III. *Partager le nombre* 10 *en deux parties telles que leur produit ſoit* 100.

Le ſimple énoncé de ce problême ſuffiroit pour en faire ſentir l'impoſſibilité : mais en tout cas, le calcul le démontrera.

Soit $a = 10 \ldots b = 100 \ldots x =$ une des parties cherchées, l'autre ſera donc $a - x$, & leur produit ſera..... $ax - xx$. On aura donc pour équation du problême.... $ax - xx = b$; & tranſpoſant les deux membres, afin de rendre le quarré $-xx$ poſitif, on aura..... $x^2 - ax = -b$.

Comparant cette équation à la formule, on trouvera $p = -a$..... $q = -b$. Donc en ſubſtituant, on aura $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-b + \frac{1}{4}a^2)}$, & mettant les valeurs de a & de b, il viendra.. $x = 5 \pm \sqrt{(-100 + 25)} =$..... $5 \pm \sqrt{(-75)}$. Or la racine quarrée de toute quantité négative eſt imagi-

naire. Donc il eſt impoſſible de partager 10 en deux parties aſſez grandes pour que leur produit donne 100.

Voilà comme l'Algebre réſout toutes ces équations. On eſt sûr d'en trouver la ſolution, quand il y en a une; & quand il n'y en a point, l'Algebre le fait connoître; que peut-on deſirer de plus?

PROBLÊME IV. *Pluſieurs perſonnes voyageant enſemble prirent une voiture qui devoit les conduire à leur deſtination, moyennant le prix convenu de* 342^{tt}. *Le voyage fait, trois de ces voyageurs s'échappèrent ſans payer; mais ceux qui reſtèrent, ſuppléant à ce qui manquoit par la fuite des autres, donnèrent chacun* 19^{tt} *de plus qu'ils n'auroient dû donner. On demande combien il y avoit de voyageurs dans cette voiture?*

Avant de réſoudre ce problême, nous remarquerons que tout cet échaffaudage

de paroles ne ſert ſouvent qu'à embrouiller la queſtion. Commençons donc par la réduire à ſes véritables termes.

Un nombre x *de perſonnes doivent payer par égales portions la ſomme de* 342^{tt}. *Trois de ces perſonnes ne payant point leur quote-part, les autres payent pour elles, & il en coûte à celles-ci* 19^{tt} *de plus. Quel eſt ce nombre* x?

Il faut d'abord mettre le problême en équation, ce qui ne ſera pas difficile pour quiconque réfléchira un peu ſur l'unique condition que l'énoncé renferme.

La ſomme de 342^{tt}, dira-t-on, doit réſulter de tout ce que payent les voyageurs qui reſtent. Or le nombre de ces voyageurs eſt $x - 3$; la part de chacun n'eût été que de $\frac{342}{x}$, ſi tous euſſent payé: mais comme trois d'entr'eux ne payent point, la part des autres eſt

augmentée de 19^{tt}; ainſi l'équation du problême eſt,

$$\left(\frac{342}{x}+19\right)(x-3)=342^{tt}.$$

Faiſant ſubir à cette équation les préparations néceſſaires, on trouvera.... $x^2-3x=54$; & comparant ce réſultat avec la formule $x^2+px=q$, on aura $p=-3$.....$q=54$; d'où on tirera $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(54+\frac{9}{4})}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}=9$ ou -6. La première de ces deux ſolutions eſt évidemment celle que l'on cherche. La ſeconde indique ſeulement que le nombre -6 ſatisfait auſſi à l'équation... $x^2-3x=54$. Il y avoit donc neuf voyageurs, dont ſix, payant 57^{tt} chacun, ont formé la ſomme de 342^{tt}.

Problême V. *Un général voudroit diſpoſer un corps de troupes en bataillon quarré: mais par ſon premier arrangement, il ſe trouve avoir* 124

hommes de trop. Faiſant une ſeconde diſpoſition, il eſſaye de mettre un homme de plus ſur chaque ligne, & alors il lui manque 129 hommes pour compleuer ſon bataillon quarré. Quel eſt le nombre des troupes qu'il commande ?

Soit $a = 124 \ldots b = 129 \ldots x =$ le nombre des ſoldats placés d'abord ſur le front du bataillon ; on aura..... $x + 1 =$ le nombre d'hommes qui par le ſecond arrangement forment ce même front. En élevant au quarré ces deux expreſſions, on aura le nombre d'hommes que ces deux bataillons quarrés contiendroient. Mais puiſque c'eſt avec le même nombre de troupes que cette double diſpoſition a été faite, il eſt clair que l'on aura les deux manières ſuivantes d'exprimer ce nombre, & que de ces deux expreſſions réſultera l'équation du problême ;

$x^2 + a = (x + 1)^2 - b = x^2 + \ldots$
$2x + 1 - b.$

A la première inſpection, on croiroit que c'eſt un problême du ſecond degré: mais ſi on ôte de part & d'autre la quantité x^2 commune aux deux membres, on ne trouvera plus qu'une équation du premier degré à réſoudre, & ſa réſolution donnera... $x = \frac{a+b-1}{2}$; formule qui par de ſimples ſubſtitutions fera connoître l'inconnue dans tous les cas ſemblables. Ici, par exemple, on trouvera que $x = 126$; d'où on conclura $x^2 = 15876$, & par conſéſéquent que $x^2 + a$, ou $15876 + 124 = 16000$. Ce général avoit donc 16000 hommes ſous ſes ordres.

PROBLÊME VI. *On a diviſé le nombre 230 en deux parties, telles que le produit de quatre fois la plus grande par ſix fois la plus petite donne 144000. Quelles ſont ces parties?*

Soit $a = 230 \ldots b = 144000 \ldots$, $m = 4 \ldots n = 6$. Si on appelle x l'une

des deux parties, l'autre ſera exprimée par $a - x$, & on aura pour équation générale des problêmes analogues à celui-là :

$$m(a-x)(nx) = b;$$

d'où.... $mnax - mnx^2 = b$.

Tranſpoſant les deux membres, & diviſant par mn, on trouvera.....

$x^2 - ax = -\frac{b}{mn}$; & comparant cette dernière équation avec..... $x^2 + px = q$, on fera $p = -a$... $q = -\frac{b}{mn}$; puis on ſubſtituera dans la valeur générale de $x - = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, ce qui donnera.....

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{b}{mn} + \frac{1}{4}a^2)} =$ $115 \pm \sqrt{(7225)}$, d'où $x = 200$, ou $= 30$.

Des Rapports et des Proportions.

Les anciens Mathématiciens rapportoient tous leurs travaux, tous leurs calculs à la Géométrie, ou à la comparaiſon des lignes, des ſurfaces & des corps, c'eſt pourquoi ils imaginèrent des dénominations analogues à cette comparaiſon. C'eſt ainſi qu'ils appelèrent *Rapport* ou *Raiſon arithmétique* la quantité dont une grandeur en ſurpaſſe une autre ; & *Rapport* ou *Raiſon géométrique* le nombre de fois qu'une grandeur en contient une autre. On a conſervé ces deux dénominations dont la première eſt relative à l'addition & à la ſouſtraction ; la ſeconde à la multiplication & à la diviſion.

Comparant, par exemple, 39 avec 13, pour ſavoir de combien 39 ſurpaſſe 13, on écrit $39 - 13 = 26$. Cette

différence 26, ou cet excès 26 eſt la *raiſon arithmétique* de 39 à 13.

Mais en comparant ces deux mêmes nombres 39 & 13, pour ſavoir combien de fois 39 contient 13, on écrit $\frac{39}{13} = 3$. Ce quotient 3 eſt la *raiſon géométrique* de 39 à 13.

Remarque. Si l'on eût diviſé 13 par 39, c'eſt-à-dire, $\frac{13}{39} = \frac{1}{3}$, le quotient eût été $\frac{1}{3}$. Or rien n'oblige à diviſer plutôt la première quantité par la ſeconde, que la ſeconde par la première. Il ſuffira donc de prévenir ici une fois pour toutes que dans les exemples ſuivans nous eſtimerons les rapports géométriques en diviſant la ſeconde quantité par la première.

Toute comparaiſon ſuppoſe au moins deux termes ; & l'on eſt convenu d'appeler *antécédent* le premier terme, & *conſéquent* le ſecond terme de toute raiſon, ſoit arithmétique, ſoit géométrique. Ainſi, *tout rapport arithmé-*

tique conſiſte dans la différence qu'il y a entre l'antécédent & le conſéquent : de même tout rapport géométrique s'exprime par le quotient d'un de ces deux termes diviſé par l'autre.

Lorſque deux quantités ont entr'elles une différence égale à celle qui ſe trouve entre deux autre quantités, on dit alors que ces quatre termes ſont en *proportion arithmétique*. Les nombres 7 & 4, par exemple, différent entr'eux de la même quantité 3, que les nombres 8 & 5 ; ainſi ces quatre nombres ſont en proportion ; & pour l'indiquer on eſt convenu d'écrire,

$$7.4 = 8.5,$$

& plus ſouvent,

$$7.4 : 8.5 ;$$

ce qui ſignifie que le rapport arithmétique de 7 à 4 eſt égal au rapport arithmétique de 8 à 5 ; ou *que 7 eſt à 4 comme 8 eſt à 5*. Il ſuit de-là que *deux raiſons arithmétiques égales forment toujours*

toujours une proportion arithmétique. Voici des exemples de ces proportions,

$$24.12 : 60.48,$$
$$1002.1000 : 2.0,$$
$$18\tfrac{2}{3}.14\tfrac{1}{3} : 11.6\tfrac{2}{3},$$
$$19\tfrac{1}{5}.23 : 24\tfrac{3}{5}.28\tfrac{2}{5},$$
&c.

Lorſque deux quantités diviſées l'une par l'autre donnent un quotient égal à celui qui réſulte de la diviſion de deux autres quantités, ces quatre quantités ſont en *proportion géométrique.* Si on diviſe, par exemple, 12 par 6, le quotient eſt 2; & ſi on diviſe 18 par 9, le quotient eſt encore 2. Ainſi les nombres 6, 12, 9 & 18 forment une proportion géométrique que l'on indique des deux manières ſuivantes,

$6 : 12 = 9 : 18$, ou $\frac{12}{6} = \frac{18}{9}$,

ou plus ſouvent,

$$6 : 12 :: 9 : 18,$$

ce que l'on prononce ainſi: *6 eſt à 12*

comme 9 eſt à 18....Concluons donc que *deux raiſons géométriques égales forment toujours une proportion géométrique.*

Exemples. $2 : 6 :: 5 : 15$,
$7 : 63 :: 1 : 9$,
$\frac{5}{17} : \frac{10}{17} :: 1 : 2$, &c.

Le premier & le dernier des quatre termes d'une proportion quelconque s'appellent les *extrêmes*, par comparaiſon avec le ſecond & le troiſième que l'on nomme alors les *moyens*.

Quand on compare deux raiſons géométriques enſemble, il arrive deux cas. 1°. Le premier antécédent eſt à ſon conſéquent comme le ſecond antécédent eſt à ſon conſéquent ; par exemple, $2 : 6 :: 5 : 15$; on dit alors que les deux derniers termes de la proportion ſont en *raiſon directe* (c'eſt-à-dire, *naturelle*) des deux premiers..... 2°. Il arrive, au contraire, quelquefois que

l'antécédent de la première raiſon eſt à ſon conſéquent, comme le conſéquent de la ſeconde eſt à ſon antécédent; les quatre nombres ſuivans ſont dans ce cas-là.....13; 26...14; 7... On dit alors que ces deux derniers termes ſont en *raiſon inverſe* (ou *renverſée*) des deux premiers.

On appelle *proportions continues* toutes celles où le conſéquent de la première raiſon ſert d'antécédent à la ſeconde. Elles ſont de deux ſortes : les *proportions continues arithmétiques*, & les *proportions continues géométriques*.

Exemple des premières,

10.18 : 18.26;

on écrit pour abréger,

÷ 10.18.26.

Exemple des dernières,

6 : 24 :: 24 : 96;

on écrit pour abréger,

$\div\!\!\cdot\!\!\cdot$ 6 : 24 : 96.

Dans les deux cas, le ſecond terme s'appelle *moyen proportionnel.* Seulement on ajoute le mot *arithmétique* ou *géométrique*, ſuivant la nature des rapports dont ce terme fait partie.

Quand on écrit pluſieurs raiſons égales de ſuite, on a un certain nombre de quantités proportionnelles entr'elles : mais quand le conſéquent de la première de ces raiſons ſert d'antécédent à la ſeconde, & que le conſéquent de la ſeconde ſert d'antécédent à la troiſième, & ainſi des autres, la ſuite de ces raiſons égales forme une *progreſſion*, dont l'eſpèce ſe détermine par la nature des raiſons qui la compoſent. Voici, par exemple, une *progreſſion arithmétique*,

1.3 : 3.5 : 5.7 : 7.9 : &c.

Pour abréger, on l'écrit ainſi,

$\div$ 1.3.5.7.9. &c.

La *progreſſion* ſuivante eſt *géométrique*,

1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: &c.

on écrit,

$\dot{\dot{-}}$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : &c.

En général, on appelle *progreſſion arithmétique* toute ſuite de termes qui comparés deux à deux ſucceſſivement ont entr'eux une même différence : & on appelle *progreſſion géométrique* toute ſuite de termes tels que la diviſion ſucceſſive de l'un par l'autre ramène toujours le même quotient.

Des Proportions & Progreſſions arithmétiques.

Nous avons éprouvé déjà pluſieurs fois dans ces Elémens l'utilité des formules générales; c'eſt pourquoi nous allons en chercher une qui renferme tous les cas des proportions arithmétiques.

Soit la proportion arithmétique.... 2.4 : 6.8 ; ou 2.(2 + 2) : 6.(6 + 2) ; on peut la traduire ainſi en langage algébrique.....$a.a+d : c.c+d$... où $a =$ au premier terme, $b+d =$ au ſecond (c'eſt-à-dire, au premier + la différence de la raiſon), $c =$ au troiſiéme, $f+d =$ au quatrième (c'eſt-à-dire, au troiſième + la différence).

Soit la proportion arithmétique.... 4.2 : 8.6 ; ou 4.(4 — 2) : 8.(8 — 2) ; on peut la traduire ainſi algébriquement....$a.a-d : c.c-d$.

En réuniſſant d'une part les deux premières raiſons de ces deux proportions, & de l'autre les deux ſecondes raiſons de ces proportions, on aura... $a.a \pm d$ & $c.c \pm d$; ou, ce qui revient au même..$a.a \mp d$ & $c.c \mp d$. Ce qui donnera la formule cherchée pour toutes les proportions arithmétiques. Cette formule eſt,

$$a.a \mp d : c.c \mp d.$$

L'examen de cette formule nous fournit les obſervations ſuivantes :

1°, *Dans une raiſon arithmétique quelconque, l'antécédent diminué ou augmenté de la différence, eſt égal au conſéquent.*

2°. *Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens.* Car en ajoutant les extrêmes de la formule, on aura $a+c\mp d$; & en ajoutant les moyens, on aura de même... $a\mp d+c$, ſomme égale à la précédente. Cette égalité de ſomme eſt la propriété fondamentale de toute proportion arithmétique. Soit 2.4 : 6.8, on aura $2+8=4+6$. Soit encore 12.10 : 50.18, on aura..... $12+18=10+20$. Donc, en général, de ce que $a.b:c.d$, on conclura..... $a+d=b+c$.

3°. Si dans une proportion arithmétique, il y a un extréme inconnu, ſa valeur ſe trouvera tout de ſuite, en

ſouſtrayant l'autre extrême, de la ſomme des moyens.... *Exemple.* On demande le quatrième terme de la proportion.. 17 29 : 13 . x ; on a $17 + x = 29 + 13$; donc $x = 29 + 13 - 17$, ou..... $x = 42 - 17 = 25$.

Si le terme inconnu eſt un des moyens, pour l'obtenir on retranchera le moyen connu de la ſomme des extrêmes.

4°. Dans toute proportion arithmétique continue, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen proportionnel. Car on a $\div a . x . b$, ou $a . x : x . b$; d'où l'on tire $x + x = a + b$, &.... $2x = a + b$.... $x = \frac{a+b}{2}$. Donc *le moyen proportionnel arithmétique entre deux quantités données eſt égal à la moitié de la ſomme de ces quantités.*

Une progreſſion arithmétique étant toujours une ſuite de termes entre leſ-

quels il régne une même différence ; la formule ſuivante doit repréſenter toutes ces progreſſions, car chaque terme y differe également de celui qui précéde... $\div a . a \mp d . a \mp 2d . a \mp 3d . a \mp 4d . a \mp 5d$. &c. &c.

Le ſigne — eſt pour les *progreſſions décroiſſantes*, & le ſigne + pour les *progreſſions croiſſantes*.

L'examen de cette formule découvre les propriétés ſuivantes des progreſſions arithmétiques :

1°. *Dans toute progreſſion arithmétique, la ſomme des termes également éloignés des extrêmes, eſt égale à la ſomme de ces extrêmes, ou à celle des moyens, ou au double du moyen quand le nombre des termes eſt impair.* Prenons ici pour exemple la ſomme du ſecond terme $a \mp d$, & de l'avant-dernier $a \mp 4d$. Cette ſomme eſt $2a \mp 5d$. Les extrêmes ſont a, & $a \mp 5d$, dont la ſomme eſt évidemment la même. Les

moyens ſont $a \mp 2d$ & $a \mp 3d$, dont la ſomme eſt également $2a \mp 5d$.

On peut vérifier ces réſultats ſur les nombres ſuivans,

$\div$ 7.12.17.22.27.32.37.42.47.

2°. On voit dans la formule qu'*un terme quelconque eſt égal à la ſomme du premier terme* $\mp$ *le produit de la différence commune par le nombre des termes précédens*. Donc on peut avoir facilement un terme quelconque d'une progreſſion arithmétique dont on connoît le premier terme a, la différence d, & le nombre n des termes, par le moyen de l'équation ſuivante où t déſigne le terme cherché..... $t = a \mp d(n - 1)$. Si l'on cherche, par exemple, le ſixième terme de la progreſſion numérique précédente, l'équation *formulaire* deviendra par les ſubſtitutions.... $t = 7 + 5(6 - 1)$... $t = 7 + 25$.... Ainſi le ſixième terme cherché eſt 32.

3°. La formule générale fait voir que dans *toute progreſſion arithmétique la différence du premier terme au dernier eſt égale au produit de la différence commune par le nombre de tous les termes moins un.* Car. 1°.....
$a-(a-5d)=a-a+5d=+5d$;
& 2°.....
$a-(a+5d)=a-a-5d=-5d.$

Mais $5d$ eſt le produit de la différence d par 5, c'eſt-à-dire, par le nombre des termes moins un.

Appelant donc le premier terme de toute progreſſion arithmétique croiſſante a, & le dernier ω (on prononce *oméga*) on aura la formule ſuivante.. $\omega-a=d(n-1)=dn-d.$ Appliquant cette formule à la progreſſion ſuivante,

$\div 4.9.14.19.24.29.34.39$,

on trouve que

$39-4=5(8-1)=5\times 7=35.$

On peut dire auſſi que *la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique eſt toujours égale à la moitié du produit de la ſomme des extrêmes par le nombre des termes, ou au produit du terme moyen* (ſi le nombre des termes eſt impair) *par le nombre des termes.*

PROBLÊME GÉNÉRAL pour tous les cas des progreſſions arithmétiques. On ſuppoſe que le premier terme ſoit repréſenté par a, que le dernier ſoit repréſenté par ω (dernière lettre de l'alphabet grec), la différence par d, le nombre des termes par n, & leur ſomme par s : & on demande des formules qui faſſent connoître immédiatement la valeur de deux quelconques de ces quantités, les trois autres étant ſuppoſées connues.

SOLUTION. De l'équation..... $\omega - a = dn - d$, on tirera d'abord quatre formules différentes pour les va-

leurs reſpectives de a, ω; d & n. (Mais avant que d'entrer dans aucun détail, il eſt à propos de prévenir le Lecteur que ce problême eſt rarement utile. On peut donc en négliger la ſolution, & paſſer tout de ſuite aux proportions géométriques). Ces quatre formules ſont,

$$\text{I. } a = \omega - dn + d,$$

$$\text{II. } \omega = a + dn - d,$$

$$\text{III. } d = \frac{\omega - a}{n - 1},$$

$$\text{IV. } n = 1 + \frac{\omega - a}{d}.$$

De l'équation $2s = an + \omega n$, on tirera ces quatre autres formules,

$$\text{V. } a = \frac{2s}{n} - \omega,$$

$$\text{VI. } \omega = \frac{2s}{n} - a,$$

$$\text{VII. } n = \frac{2s}{a + \omega},$$

VIII. $s = \frac{an - \omega n}{2}$.

Et ſi dans l'équation $2s = an + \omega n$, vous ſubſtituez la valeur de ω priſe dans l'équation $\omega - a = dn - d$, vous aurez.. $2s = 2an + dnn - dn$, d'où vous tirerez les quatre formules ſuivantes,

IX. $a = \frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2}$,

X. $d = \frac{2s - 2an}{nn - n}$,

XI. $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \ldots \right.}$

$\left. \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)$,

XII. $s = an + \frac{dnn - dn}{2}$.

Subſtituant enſuite dans la même équation $2s = an + \omega n$, la valeur de a

prise dans l'équation $\omega - a = dn - d$, vous trouverez $2s = 2\omega n - dnn + dn$, équation qui donnera quatre nouvelles formules.

XIII. $\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$,

XIV. $d = \frac{2\omega n - 2s}{nn - n}$,

XV. $n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}$,

XVI. $s = \omega n - \frac{dn^2}{2} + \frac{dn}{2}$.

Substituant enfin dans $2s = an + \omega n$, la valeur de n prise dans la première équation, vous aurez

$$2s = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d},$$

d'où se tirent les quatre dernières formules,

XVII. $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + \omega d + \omega^2)}$,

XVIII $\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 + ad + a^2)}$,

XIX. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$,

XX. $s = \frac{a + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}$.

Et si l'on veut disposer ces vingt formules de manière à reconnoître dans l'instant celle qui doit donner la valeur demandée, on peut les arranger de la manière suivante.

Etant donnés	*Trouver*	*Formules des Progressions arithmétiques.*
ω, d, n	a	$a = \omega - dn + d,$
ω, n, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega,$
ω, d, s		$a = \frac{1}{4}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + \omega d + \omega^2)},$
d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2},$

a, d, n		$\omega = a + dn - d,$
a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a,$
a, d, s	ω	$\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 - ad + a^2)},$
d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2},$

Etant donné	*Trouver*	*Formules des Progreſſions arithmétiques.*
a, ω, n	d	$d = \frac{\omega - a}{n - 1}$,
a, n, s		$d = \frac{2s - 2an}{nn - n}$,
a, ω, s		$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$,
ω, n, s		$d = \frac{2\omega n - 2s}{nn - n}$,

a, ω, d	n	$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$,
a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}$,
a, d, s		$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)}$,
ω, d, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}$.

Etant donnés	*Trouver*	*Formules des Progressions arithmétiques.*
a, ω, n	s	$s = \frac{an + \omega n}{2}$,
a, d, n		$s = an + \frac{dnn - dn}{2}$,
a, d, ω		$s = \frac{a + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}$,
ω, d, n		$s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}$.

Applications de ces formules.

PROBLÊME I. On demande la ſomme des coups frappés par une horloge, à chaque tour du cadran ?

Le nombre des termes n eſt ici égal à 12, le premier terme $a = 1$, & le dernier $\omega = 12$. En ſubſtituant ces valeurs dans la première formule des valeurs de s ..... $s = \frac{an + \omega n}{2}$, on aura .... $s = \frac{12 \times 1}{2} + \frac{12 \times 12}{2} =$

$6 + \frac{144}{2} = 6 + 72 = 78$ coups.

PROBLÊME II. On ſait d'après les obſervations de Galilée, que les eſpaces parcourus en vertu de la gravité par un corps qui deſcend du repos, croiſſent ſuivant la progreſſion des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c; c'eſt-à-

dire, qu'un corps tombant par la ſeule impreſſion de la gravité parcourt à peu-près 15 pieds dans la première ſeconde ſuivante, & ainſi de ſuite. On demande combien il aura parcouru de pieds au bout de ſix ſecondes ?

Ce problême ſe réduit à trouver la ſomme d'une progreſſion arithmétique dont le premier terme $a = 15$ pieds, dont la différence $d = 30$, & dont le nombre des termes $n = 6$. On le réſoudra donc par la ſeconde formule des valeurs de s ..... $s = an + \frac{(dn - d)n}{2} = 90 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(180 - 30)6}{2} = 540 \text{ pieds.}$$

PROBLÊME III. Un voyageur voudroit arriver en 4 jours à ſa deſtination, en accélérant chaque jour ſa marche de 3 lieues. Pour exécuter ſon deſſein, il eſt obligé de faire 29 lieues $\frac{1}{2}$ le dernier

nier jour, on demande combien il en a fait le premier jour?

Ce problême ſe réſout par la formule qui donne la valeur de a, quand on connoît ω, d & n. On a donc.....

$a = \omega - dn + d = 29\frac{1}{2} - 3 \times 4 + 3 = 20\frac{1}{2}$ lieues pour le premier jour.

La formule... $s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}$

donneroit la longueur de ſa route....

$s = 1180 - \frac{3 \times 16 + 3 \times 4}{2} = 100$

lieues.

PROBLÊME IV. Si on eût demandé en combien de jours ce voyageur auroit parcouru les 100 lieues, en faiſant 20 lieues $\frac{1}{2}$ le premier jour, 3 de plus le jour ſuivant, & ainſi de ſuite, on ſe ſeroit ſervi de la formule qui donne la valeur de n, quand a, d, s ſont connus. Cette formule eſt.....

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{25}{d} + \tfrac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{41}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{200}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{41}{6} + \tfrac{1681}{36}\right)} = -\tfrac{58}{6} +$$

$$\sqrt{\left(\frac{4090 - 246}{36}\right)} = -\tfrac{58}{6} +$$

$\frac{62}{6} = \frac{24}{6} = 4$ jours.

PROBLÊME V. Une perſonne a été miſe à l'amende pendant pluſieurs mois de ſuite. Elle a payé 6^{tt} pour le premier mois, & 102^{tt} pour le dernier. Chaque mois l'amende étoit plus forte de 12^{tt}. Combien de mois l'a-t-elle payée ?

On connoît $a = 6^{tt}$, $\omega = 102^{tt}$, $d = 12^{tt}$, & l'on cherche n. On prendra donc la formule ſuivante,

$$n = 1 + \frac{\omega - a}{d} = 1 + \frac{102 - 6}{12} = 9;$$

& l'on trouvera que l'amende a été payée pendant 9 mois.

PROBLÊME VI. Dans un amas de boulets de canon disposés en progression arithmétique croissante, on suppose, 1°. qu'il y a dix-huit rangs dont chacun soit formé par un nombre de boulets plus grand de 2 que celui qui le précéde; 2°. Qu'il y ait en tout 360 boulets. On demande combien il y en a dans le dernier rang?

Puisque l'on connoît d, n, s, on aura

$$w = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2} = 20 + 17 =$$

37 boulets.

PROBLÊME VII. Les mêmes choses étant données que dans le problême précédent, combien y a-t-il de boulets dans la première rangée?

Réponse. $a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2} =$

$20 - 17 = 3$ boulets.

PROBLÊME VIII. Etant donnés deux termes a & w, comment insérer entre

eux un des moyens proportionnels, de manière qu'il réſulte du tout une progreſſion arithmétique? On voudroit, par exemple, intercaler ſix termes proportionnels arithmétiques entre 4 & 32?

Ce problême ſera réſolu, dès que l'on aura trouvé la différence de la progreſſion cherchée; parce qu'en l'ajoutant au premier terme qui eſt donné, on aura le ſecond; en l'ajoutant au ſecond, on aura le troiſième, &c. C'eſt donc ici uniquement d que l'on cherche, & l'on connoît a & ω. Ainſi l'on employera la formule $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$, dans laquelle $n - 1$ deviendra le nombre de termes donnés, $m + 1$; puiſque $n = m + 2$, & que dès-lors $n - 1 = m + 1$. En ſubſtituant donc dans la formule précédente $m + 1$ à ſon égal $n - 1$; on aura la nouvelle formule

$d = \frac{\omega - a}{m+1}$, qui réſoudra les problêmes de cette ſorte.

Dans ce cas on a $d = \frac{32-4}{6+1} = \frac{28}{7} = 4$. Ainſi la progreſſion demandée ſera $\div 4.8.12.16.20.24.28.32$.

PROBLÊME IX. Entre 13 & 7 on voudroit inſérer quatre termes qui fiſſent une progreſſion arithmétique ?

En ſe ſervant de la formule préparée dans le problême précédent, on aura $\omega = 13$, parce que la progreſſion étant décroiſſante, on renverſe l'ordre des termes..... $a = 7$..... $m = 4$..... $d = \frac{\omega - a}{m+1} = \frac{13-7}{5} = \frac{6}{5}$. Cette différence eſt ſouſtractive, parce que la progreſſion eſt décroiſſante. Ainſi l'on aura

$\div 13 . 11\frac{4}{5} . 10\frac{3}{5} . 9\frac{2}{5} . 8\frac{1}{5} . 7$.

Remarque. La formule prise dans le sens direct nous auroit appris par le signe de la différence, que celle-ci étoit soustractive. Soient... $a = 13$... $w = 7$... $m = 4$. La formule deviendra par les substitutions.....

$$d = \frac{7 - 13}{5} = \frac{-6}{+5} = -\frac{6}{5}.$$

Des Proportions et Progressions géométriques.

Cherchons une formule qui renferme tous les cas des proportions géométriques. Soient 2 : 4 :: 6 : 12. Le quotient de chacune des deux raisons qui forment cette proportion est $2 = q$. On pourra donc convertir cette proportion en cette autre,... $\frac{4}{2} : 4 :: \frac{12}{2} : 12$, ou en celle-ci,..... $2 : 2 \times 2 :: 6 : 6 \times 2$, que l'on traduit algébriquement... $a : aq :: c : cq$.

L'examen de la formule générale des

proportions géométriques..... $a : aq :: c : cq$.... donnera les réſultats ſuivans :

1°. *Dans toutes les raiſons géométriques le conſéquent eſt égal à l'antécédent multiplié par le quotient qui exprime le rapport de ces deux termes.* Ainſi dans $4 : 8 \ldots . 8 = 4 \times 2$. (Ceci eſt vrai généralement ; parce que ſi l'on a $8 : 4$, on peut renverſer cette raiſon, & dire $4 : 8$, ſans changer le quotient qui eſt 2 pour les deux raiſons.)

2°. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.* Ainſi dans la formule.... $a : aq :: c : cq$.... on aura $a \times cq = aq \times c$, ou $acq = aqc$. Dans la proportion... $2 : 4 :: 6 : 12$, on aura..... $2 \times 12 = 4 \times 6$. Cette propriété fondamentale des proportions géométriques eſt remarquable par l'uſage continuel que l'on en fait dans toutes les parties des Mathématiques.

3°. Il ſuit de la propriété fondamentale qui vient d'être expliquée, qu'il eſt aiſé de trouver le quatrième terme d'une proportion dont on connoît les trois autres. Si le terme inconnu eſt un extrême, comme dans cette proportion.... $a : b :: c : x$, on aura tout de ſuite, $ax = bc$, & par conſéquent $x = \frac{bc}{a}$.... s'il eſt un des moyens, comme dans cette proportion..... $a : y :: c : d$, on aura tout de même, $ad = cy$, & $y = \frac{ad}{c}$. Donc *un terme quelconque d'une proportion géométrique eſt égal, ſi c'eſt un moyen, au produit des extrêmes diviſé par l'autre moyen; & ſi c'eſt un extrême, il eſt égal au produit des moyens diviſé par l'autre extrême.* Les Arithméticiens appellent cette opération la *Régle de Trois*.

Exemples. On demande le quatrième terme de la proportion... $3 : 18 :: 5 : x$.

Faites $3x = 18 \times 5$, & concluez que

$$x = \frac{18 \times 5}{3} = 6 \times 5 = 30.$$

On demande le troiſième terme de la proportion..... $7 : 63 :: x : 18$.

Vous aurez.....$7.18 = 63x$; donc

$$x = \frac{7.18}{63} = 2.$$

4°. De la propriété fondamentale des proportions, il ſuit que *de toute proportion géométrique repréſentée par celle-ci*....a : b :: c : d, *on peut toujours tirer une équation, qui eſt ici* a d = b c. Réciproquement, *d'une équation quelconque on peut toujours déduire une proportion.* On a ſouvent beſoin de ces transformations; c'eſt pourquoi nous en allons donner ici pluſieurs exemples. Si on a... $mn = pq$, on conclura que... $m : p :: q : n$; pro-

portion bien juſte (de même que les ſuivantes), puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Si on avoit.... $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$; on en déduiroit..... $a + x : b + y :: b - y : a - x$. Etant donnée l'équation.... $1 - z^2 = d$, on trouveroit..... $1 + z : d :: 1 : 1 - z$. A-t-on l'équation.... $a + d = c - x$, on en déduit.... $a + d : 1 :: c - x : 1$.

De l'équation $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, on tire... $a : b :: \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$. Enfin de l'équation $xy = 1$, on déduit $x : 1 :: 1 : y$, proportion géométrique continue, puiſque le même terme eſt à-la-fois conſéquent de la première raiſon, & antécédent de la ſeconde.

5°. *Dans toute proportion géométrique continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen pro-*

portionnel. Car ſi l'on a..2 : 8 :: 8 : 32, ou (comme on l'écrit ordinairement) ∴ 2 : 8 : 32 ; on déduira.....$2 \times 32 = 8 \times 8 = 8^2$. Donc *pour inſérer un moyen proportionnel géométrique entre deux quantités connues, il faut extraire la racine quarrée du produit de ces deux quantités.* Ainſi..... ∴ 3 : x : 12 ; d'où il ſuit que $x^2 = 36$ & $x = \sqrt{36} = 6$.

6°. La propriété fondamentale des proportions géométriques permet de faire ſubir à quatre grandeurs proportionnelles tous les changemens qui ne détruiſent pas l'égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens. On peut donc, 1°. *mettre les extrêmes à la place des moyens* (inverſion exprimée dans pluſieurs ouvrages par le mot *invertendo*) : 2°. *mettre un moyen à la place de l'autre moyen, ou un extrême à la place de l'autre extrême* (changement exprimé par le mot *al-*

ternando). Si on a, par exemple, $a:b::c:d$, aucune des inverſions ou permutations ſuivantes ne troublera l'égalité des deux rapports,

$b:a::d:c$ $b:d::a:c$ $d:b::c:a$,
$a:c::b:d$ $c:a::d:b$ $c:d::a:b$;

car on voit que toutes ces proportions donnent également $ad=bc$. 3°. Former une infinité d'autres proportions par voie d'addition, de ſouſtraction, de multiplication, &c. pourvu que l'on faſſe toujours les mêmes opérations ſur deux raiſons égales. Si, par exemple, $a:b::c:d$, on a de même,

$$a\pm b:b::c\pm d:d;$$
ou $a:a\pm b::c:c\pm d.$

$$a\pm b:a\mp b::c\pm d:c\mp d,$$
$$na:b::nc:d.$$

$\frac{a}{b}:b::\frac{c}{b}:d$, ou $a:\frac{b}{m}::c:\frac{d}{m}$. &c.

4°.

4°. On a auſſi $a^m : b^m :: c^m : d^m \ldots$ $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$. Car ſi $ad = bc$, on aura toujours $a^m d^m = b^m c^m$, & $a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$. Donc en général, *toutes les fois que l'on a des quantités proportionnelles entr'elles, leurs puiſſances de même nom ſont proportionnelles auſſi: de même des racines de même nom;* car les racines ſont des puiſſances fractionnaires.

7°. Il ſuit que ſi on a deux proportions géométriques repréſentées,

l'une, par..... $a : aq :: c : cq$,

l'autre, par..... $g : gp :: h : hp$,

leurs produits, terme par terme, ſont auſſi proportionnels; de ſorte que l'on aura,

$$ag : agpq :: ch : chpq.$$

Il ſuffit, pour s'en convaincre, de comparer le produit des extrêmes avec celui des moyens. D'ailleurs pq eſt le

quotient des deux conſéquens diviſés par leurs antécédens ; donc les deux raiſons ſont égales. Pareillement, ſi on diviſe les quatre termes d'une proportion par les quatre termes d'une autre, les quotiens ſeront en proportion.

8°. Soit une ſuite de termes proportionnels repréſentée par..... $a : aq :: c : cq :: e : eq :: g : gq$; on a remarqué qu'il régnoit un même quotient q entre la ſomme des antécédens $a + c + e + g$ de cette formule, & la ſomme des conſéquens..... $aq + cq + eq + gq$, qu'entre un antécédent quelconque a, & ſon conſéquent aq, ou même qu'entre un nombre quelconque de ces antécédens, & le même nombre de conſéquens. Et de cette remarque on a conclu que *dans une ſuite de raiſons géométriques égales, quelles qu'elles ſoient, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un ſeul an-*

tecédent eſt à ſon conſéquent ; ou comme un nombre quelconque d'antécédens eſt au même nombre de conſéquens.

On pourroit dire auſſi que cette proportion a lieu généralement dans tous les cas ſemblables, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens dans la formule ſuivante qui peut repréſenter tous les cas pareils : $a+c+e+g : (a+c+e+g)q :: a : aq :: a+c+e : (a+c+e)q$.

Ici nous remarquerons, 1°. qu'étant donné une raiſon géométrique quelconque, on peut en former une ſuite d'autres qui lui ſeront parfaitement égales, ſoit en multipliant, ſoit en diviſant ces deux termes par une même quantité. Car ſoit $a : aq$ la raiſon donnée ; ſoit m le multiplicateur de ces deux termes, on aura pour produit am & amq, qui ont viſiblement entr'eux le même rapport q qui exiſtoit entre a & aq.

Si on eut diviſé par n ces deux termes, les quotiens $\frac{a}{n}$ & $\frac{aq}{n}$ auroient eu pareillement le même rapport q. *Une raiſon géométrique ne change donc pas de valeur, ſoit que l'on multiplie, ſoit que l'on diviſe ſes deux termes par une même quantité.*

Or, toute fraction peut être regardée comme une raiſon géométrique. Il eſt donc démontré (ce que nous n'avons pu qu'inſinuer dans la théorie des fractions) que la multiplication ou la diviſion des deux termes d'une fraction quelconque par une même quantité, n'altère jamais la valeur de cette fraction.

9°. Et de-là il ſuit évidemment que *deux quantités quelconques ont entr'elles le même rapport, que leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, & toutes leurs parties ſemblables.* Ainſi on a toujours :

$a : b :: \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} b :: \frac{1}{10} a : \frac{1}{10} b :: \frac{1}{p} a : \frac{1}{p} b.$

Nous remarquerons, 2°. que l'on appelle en général *raiſon compoſée*, le rapport des produits de deux ou de pluſieurs raiſons géométriques quelconques, multipliées antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent. On dit, par exemple, que la raiſon de $mnp : qrs$ eſt une raiſon compoſée de trois *raiſons ſimples*.... $m : q$.... $n : r$... $p : s$ qui peuvent être miſes auſſi ſous cette forme... $\frac{m}{q}, \frac{n}{r}, \frac{p}{s}$.

Mais quand une raiſon eſt compoſée de deux raiſons égales, on dit alors que c'eſt une *raiſon doublée*. Ainſi la raiſon de $ab : abqq$ eſt la raiſon doublée des raiſons ſimples & égales de $a : aq$ & de $b : bq$. Quand il y a trois raiſons égales, le rapport des produits reſpectifs s'appelle une *raiſon triplée*, &c.

Or la raiſon doublée de deux autres eſt égale à celle des quarrés d'une quelconque de ces raiſons. Et la raiſon triplée eſt la même que celle des cubes d'une des trois raiſons qui lui ſervent de facteurs. Car ſoient les deux raiſons égales... $a : aq$ & $b : bq$; il eſt évident que la raiſon doublée $ab : abq^2$ eſt exprimée par le même quotient q^2, que la raiſon des quarrés $a^2 : a^2q^2$ des deux premiers termes, ou celle de $b^2 : b^2q^2$, quarré des deux derniers.

Ce qui regarde l'égalité de la raiſon triplée à celle des cubes d'une des trois raiſons ſimples, ſe démontre de la même manière.

Propriétés des Progreſſions géométriques.

Pour trouver les propriétés des progreſſions géométriques, conſtruiſons une formule qui repréſente toutes les progreſſions de cette eſpèce.

Remarque. Ce que nous allons dire des progreſſions croiſſantes, pourra s'appliquer également aux progreſſions décroiſſantes, en obſervant alors d'appeler le premier terme ω, & le dernier a.

On ſait qu'une progreſſion géométrique eſt une ſuite de termes qui tous, à l'exception du premier & du dernier, ſont alternativement antécédens & conſéquens d'une ſuite de raiſons égales. Or l'égalité de ces raiſons ſe manifeſte par l'identité du quotient qui les exprime. Donc la formule ſuivante peut repréſenter toute progreſſion géométrique.

$$\div\!\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots aq^n.$$

Dans cette formule, on voit que les expoſans de q ſont en progreſſion arithmétique, puiſqu'à cauſe de $q^0 = 1$, on peut y faire ce léger changement :

$$\div\!\!\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots aq^n.$$

On voit auſſi qu'en faiſant $a = 1$, cette dernière formule devient,

$$q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots q^n ;$$

& qu'alors elle exprime la ſuite des puiſſances entières d'une quantité quelconque q. Ainſi les puiſſances ſucceſſives & entières d'une même quantité forment toujours une progreſſion géométrique. Il n'en eſt pas de même des puiſſances ſucceſſives & fractionnaires, parce que leurs expoſans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ne ſont pas en progreſſion géométrique.

10°. En général, *toutes les fois que les expoſans de diverſes puiſſances même quantité ſont en progreſſion d'une arithmétique, les termes affectés de ces expoſans ſont en progreſſion géométrique.*

Exemples. $\therefore q^2 : q^5 : q^8 : q^{11} : q^4$, &c. $\therefore b : b^3 : b^5 : b^7 : b^9$; la même choſe ſe démontre également par la formule $\therefore aq^m : aq^{m+1d} : aq^{m+2d} : aq^{m+3d}$, &c. dont les expoſans ſont en progreſſion

arithmétique quelconque, & dont les termes ſont évidemment en progreſſion géométrique, puiſqu'il règne entr'eux un même quotient q^d.

11°. Reprenant la formule générale $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$, &c, nous obſerverons que le produit de deux termes également éloignés des extrêmes, y eſt égal au produit des extrêmes, lequel à ſon tour eſt égal au produit des moyens, ſi le nombre des termes eſt pair, ou au quarré du moyen, ſi le nombre des termes eſt impair. Car $aq \times aq^3 = a \times aq^4 = aq^2 \times aq^2$; donc toutes les progreſſions géométriques ont la même propriété.

Et puiſque les proportions continues ne ſont que des progreſſions de trois termes, nous conclurons généralement, comme nous l'avons déjà fait, que *dans toute proportion géometrique continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen proportionnel.*

12°. Conſidérant la même formule, nous obſerverons auſſi que ſon premier terme eſt au troiſième, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond: puiſque l'on a.. $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$ :: &c. Cette propriété a donc lieu dans toutes les progreſſions géométriques.

On a pareillement..... $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$. Donc le premier terme d'une progreſſion géométrique quelconque eſt au quatrième, comme le cube de ce premier terme eſt au cube du ſecond.

En général, *deux termes quelconques de cette formule ſont entr'eux comme le premier & le ſecond élevés à la puiſſance marquée par l'intervalle qui ſépare les deux termes dont il s'agit.*

13°. Dans la formule des progreſſions, on voit qu'un terme quelconque eſt égal au produit du premier par le quotient élevé à une puiſſance marquée

par le nombre des termes précédens. Le ſixième terme, par exemple, aq^5, n'eſt autre choſe que le produit du premier terme a par le quotient q élevé à la cinquième puiſſance. Appelant donc t le terme que l'on cherche, & déſignant par n le nombre de tous les termes de la progreſſion, on aura généralement... $t = aq^{n-1}$. Cette formule nous ſera bientôt utile; mais pour rendre ſon utilité plus directe, nous mettrons ω (dernière lettre de l'alphabet grec que l'on prononce *oméga*) à la place de t, & nous aurons.... $\omega = aq^{n-1}$.

De ce qui précéde on déduit la valeur s des termes d'une progreſſion géométrique quelconque, dont on connoit le premier terme a, le dernier ω, & le quotient q. En effet, tous les termes d'une progreſſion, hors le dernier, étant antécédens, on peut repréſenter la ſomme des antécédens par l'expreſſion $s - \omega$; & tous les termes de

cette même progreſſion, hors le premier, étant conſéquens, la ſomme des conſéquens peut être repréſentée par l'expreſſion $s - a$. Mais nous ſavons que dans une ſuite de raiſons géométriques égales, & par conſéquent dans toute progreſſion géométrique la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent. On a donc.. $s - \omega : s - a :: a : aq$; d'où l'on tire d'abord.. $saq - a\omega q = sa - aa$; puis.... $sq - \omega q = s - a$; enſuite.. $sq - s = \omega q - a$; enfin.....

$$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}.$$

N. B. Cette formule.....

$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ jointe à la précédente $\omega = aq^{n-1}$ ſervira à réſoudre pour les progreſſions géométriques un *problème général* analogue à celui que

nous avons déjà réſolu pour les progreſſions arithmétiques : mais pour en ſaiſir tous les réſultats, il faut avoir lu auparavant ce qui a rapport aux logarithmes & aux équations des degrés ſupérieurs. On peut donc paſſer au chapitre ſuivant quand on ne connoît pas ces deux théories.

Problême général pour tous les cas des progreſſions géométriques.

Etant données dans une progreſſion géométrique trois des quantités ſuivantes, a le premier terme, ω le dernier, n le nombre des termes, s leur ſomme, q le quotient, trouver immédiatement l'une des deux autres.

La première formule, $\omega = aq^{n-1}$, en donne trois autres, de ſorte que l'on a.. I°. $\omega = aq^{n-1}$.. II°. $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$. III°. $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$.....

IV°. $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$, puis *Logarithme de* ω, ou $\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,a = (n-1)\,\text{L.}\,q$, enfin.... $n = 1 + \frac{\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,a}{\text{L.}\,q}$.

La ſeconde formule, $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, en donne trois nouvelles, & l'on a...

V°. $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.....

VI°. $sq - s = \omega q - a$, puis.....

$a = \omega q - sq + s$.....

VII°. $sq - s + a = \omega q$; puis.....

$\omega = s - \frac{s + a}{q}$.....

VIII°. $sq - \omega q = s - a$; puis.....

$q = \frac{s - a}{s - \omega}$.

Subſtituant dans la ſeconde formule la valeur de ω priſe dans la première,

on trouvera.. $aq^{n-1} = s - \frac{s+a}{q}$,

ou.... $aq^{n-1} \times q = sq - s + a$....

ou $aq^{n-1+1} = sq - s + a$.... ou

$aq^n - a = sq - s$..... ou

$a(q^n - 1) = s(q-1)$. D'où l'on tire facilement.. IX°.. $s = a\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)$.

X°.... $a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.....

XI°... $q^n - 1 = s\left(\frac{q-1}{a}\right)$....

ou $q^n = 1 + s\left(\frac{q-1}{a}\right)$.....

ou $q^n = \frac{a+sq-s}{a}$..... ou

n L. q = L. $(sq - s + a)$ — L. a....

& enfin.... $n = \frac{\text{L.}(sq-s+a)}{\text{L. } q}$..

XII°... $q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$.

Si on ſubſtitue dans la ſeconde formule la valeur de a prise dans la première, on aura $\frac{\omega}{q^n - 1} = \omega q - sq + s$,

ou $\omega q - \frac{\omega}{q^n - 1} = sq - s$, ou...

$\frac{\omega q^n - \omega}{q^n - 1} = s(q - 1)$, ou.....

$\omega \left(\frac{q^n - 1}{q^n - 1} \right) = s(q - 1)$,...d'où l'on tire.....

XIII°. $s = \frac{\omega}{q - 1} \left(\frac{q^n - 1}{q^n - 1} \right)$,..

ou....$s = \frac{\omega}{q^n - 1} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$...

XIV°. $\omega = s(q - 1) \times \left(\frac{q^n - 1}{q^n - 1} \right)$,

ou $\omega = s q^n - 1 \left(\frac{q - 1}{q^n - 1} \right)$.....

XV°. Ayant.. $\frac{\omega}{q^n - 1} = \omega q - sq + s$,

on a $\omega = q^{n-1}(\omega q - sq + s)$.....

enſuite $\frac{\omega}{\omega q - sq + s} = q^{n-1}$....

puis L. ω — L. $(\omega q - sq + s) =$..

$(n - 1)$ L. q..... enfin

$$n = 1 + \frac{\text{L. } \omega - \text{L. } (\omega q - sq + s)}{\text{L. } q}.$$

XVI°. De l'équation XIV°.....

$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$, on tire..

$\omega q^n - \omega = sq^n - sq^{n-1}$..... puis

$sq^n - \omega q^n - sq^{n-1} + \omega = 0$.....

enſuite $(s - \omega)q^n - sq^{n-1} + \omega = 0$,

enfin .....$q^n - \frac{s}{s-\omega} q^{n-1} +$

$\frac{\omega}{s-\omega} = 0$.

Enfin ſubſtitution faite dans la ſeconde formule de la valeur de.....

$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$ prise dans la première, on aura..... $s(q-1) = \omega q - a$..... où $s\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - s = \omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - a$.

Mais on sait que $\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} =$..... $\left(\frac{\omega}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$; & que $\omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = \sqrt[n-1]{\frac{\omega \times \omega^{n-1}}{a}} =$.....

$\sqrt[n-1]{\frac{\omega^n}{a}} = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$. D'après cela l'équation $s\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - s =$..... $\omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - a$ devient.....

$$s\left(\frac{\omega}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a \ldots$$

$$s\,\omega^{\frac{1}{n-1}} - s\,a^{\frac{1}{n-1}} = \omega^{\frac{n}{n-1}} - \ldots\ldots$$

$$a \times a^{\frac{1}{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

XVII°. $$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} \ldots\ldots$$

XVIII°. $$s\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - s = \ldots\ldots$$

$$\omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - a \ldots s\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} - \ldots\ldots$$

$$\omega\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = s - a \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(s-\omega)\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = s - a \ldots\ldots$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = \frac{s-a}{s-\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{L.\omega - L.a}{n-1} = L.(s-a) - L.(s-\omega).$$

$$n = 1 + \frac{L.\omega - L.a}{L.(s-a) - L.(s-\omega)}.$$

XIX°. De ce que $s\,\omega^{\frac{1}{n-1}} - s\,a^{\frac{1}{n-1}} = \omega^{\frac{n}{n-1}} - a \times a^{\frac{1}{n-1}}$ ..... Il ſuit que $s\,\omega^{\frac{1}{n-1}} - \omega^{\frac{n}{n-1}} = s\,a^{\frac{1}{n-1}} - \ldots\ldots$ $a \times a^{\frac{1}{n-1}}$. Mais.. $\omega^{\frac{n}{n-1}} = \omega \times \omega^{\frac{1}{n-1}}$. C'eſt pourquoi l'équation précédente devient.... $s\,\omega^{\frac{1}{n-1}} - \omega \times \omega^{\frac{1}{n-1}} = \ldots$ $s\,a^{\frac{1}{n-1}} - a \times a^{\frac{1}{n-1}}$ ..... ou $(s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}}$ .....

XX°. $(s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}} = (s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}}$.

On peut maintenant diſpoſer ces vingt formules en Table, comme nous

l'avons déjà fait pour les progreſſions arithmétiques.

Etant donnés	*Trouver*	*Formules des Progressions géométriques.*
ω, q, n	a	$a = \dfrac{\omega}{q^n - 1}$,
ω, s, n		$(s - a)\, a^{\frac{1}{n-1}} = (s - \omega)\, \omega^{\frac{1}{n-1}}$,
ω, q, s		$a = \omega q - s q + s$,
q, n, s		$a = s\left(\dfrac{q-1}{q^n - 1}\right)$.

a, q, n		$\omega = a q^{n-1}$,
$a, s\ n,$		$(s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}}$,
a, q, s	ω	$\omega = s - \frac{s+a}{q}$,
q, n, s		$\omega = s\,q^{u-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.

Et ini donné	Trouver	FORMULES des Progressions géométriques.
a, ω, n	q	$d = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$,
a, n, s		$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s}{a} - 1 = 0$,
a, ω, s		$q = \frac{s-a}{s-\omega}$,
n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega} q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$.

a, ω, q	n	$n = 1 + \frac{\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,a}{\text{L.}\,q}$,
a, ω, s		$n = 1 + \frac{\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,a}{\text{L.}\,(s-a) - \text{L.}\,(s-\omega)}$,
a, q, s		$n = \frac{\text{L.}\,(sq - s + a) - \text{L.}\,a}{\text{L.}\,q}$,
ω, q, s		$n = 1 + \frac{\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,(\omega q - sq + s)}{\text{L.}\,q}$.

Etant donnés	*Trouver*	*Formules des Progressions géométriques.*
a, ω, n	s	$s = \dfrac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}},$
a, q, n		$s = a\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right),$
a, ω, q		$s = \dfrac{\omega q - a}{q - 1},$
ω, n, q		$s = \dfrac{\omega}{q^n - 1}\left(\dfrac{q^n - 1}{q - 1}\right).$

Applications de ces formules.

PROBLÊME I. On a tiré à cinq repriſes différentes du vin d'un tonneau en ſuivant une progreſſion géométrique croiſſante, dont le dernier terme eſt 243 pintes, & dont le quotient eſt 3. Combien de pintes a-t-on tiré la première fois?

Soit $\omega = 243 \ldots q = 3 \ldots n = 5 \ldots$ On aura par la première des formules...

$$a = \frac{\omega}{q^n - 1} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3,$$

c'eſt-à-dire, que l'on a tiré trois pintes de vin la première fois.

PROBLÊME II. Une perſonne ayant joué à quitte ou double contre une autre, a perdu dix fois de ſuite. Elle avoit joué 3^{tt} la première fois; que perd-elle après la dixième?

Les données ſont..... $a = 3^{\text{tt}}$..... $q = 2$..... $n = 10$, & on cherche ω.

Cette valeur ſe trouvera par la cinquième formule..... $\omega = a\,q^{n-1} = 3.2^9 = 3.512 = 1536^{tt}$.

PROBLÊME III. On ſuppoſe que la population d'un pays s'eſt accrue uniformément tous les ans d'une manière ſi rapide, que de dix mille ames qu'il y avoit d'abord, il s'en eſt trouvé 14641 au bout de quatre ans; ſuivant quelle progreſſion s'eſt fait cet accroiſſement?

$a = 10000 \ldots \omega = 14641 \ldots n = 5$; & on demande q. La formule..... $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$ la donnera. Cette formule devient par les ſubſtitutions.... $q = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$. L'accroiſſement annuel a donc été de $\frac{11}{10}$.

PROBLÊME IV. Pour s'être obſtiné à plaider, il en a coûté 121000^{tt} à un

plaideur forcené. Le premier procès ne lui coûte que 1000^{tt}; mais le dernier lui a coûté 81000^{tt}. On ſait d'ailleurs que les frais des autres ont été moyens proportionnels entre ces deux extrêmes: on voudroit ſavoir combien ce plaideur a perdu de procès.

Soient.. $a = 1000^{\text{tt}}$.. $\omega = 81000^{\text{tt}}$.. $s = 121000$. On trouvera la valeur demandée de n par la formule..... $n = 1 + \frac{\text{L.}\,\omega - \text{L.}\,a}{\text{L.}\,(s-a) - \text{L.}\,(s-\omega)}$, qui donne $n = 1 + \frac{\text{L.}\,81000 - \text{L.}\,1000}{\text{L.}\,120000 - \text{L.}\,40000} =$

$1 + \frac{\text{L.}\,(\frac{81000}{1000})}{\text{L.}\,(\frac{120000}{40000})} = 1 + \frac{\text{L.}\,81}{\text{L.}\,3} =$

$1 + \frac{4\,\text{L.}\,3}{\text{L.}\,3} = 1 + 4 = 5.$

Problême V. Un diſſipateur a mangé tout ſon bien en cinq mois de tems; chaque mois il quadruploit ſa dépenſe,

& le premier mois il avoit dépenſé cent louis. On demande quel étoit ſon bien ?

$a = 2400^{\text{tt}} \ldots q = 4 \ldots n = 5$; ainſi la valeur de s ſe déduira de la formule... $s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \ldots\ldots$

$2400\left(\frac{4^5 - 1}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2400\left(\frac{1024 - 1}{3}\right) = 2400.\frac{1023}{3} =$

$2400.341 = 818400.$

Problême VI. Inſérer deux termes moyens proportionnels géométriques entre 2 & 128 ?

On connoît ici.. $a = 2 \ldots \omega = 128 \ldots$ $n = 4$, il ne s'agit que de trouver q pour avoir le ſecond terme $= aq$, enſuite le troiſième terme $= aq^2$. Prenons donc la neuvième formule..... $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, qui devient par les

substitutions... $q = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \ldots\ldots$

$\sqrt[3]{64} = 4$. Si $q = 4$, le second terme demandé $= aq = 2 . 4 = 8$; & le troisième demandé $= aq^2 = 2 . 16 = 32$. On a donc $\div\!\!\cdot\!\!\cdot$ 2 : 8 : 32 : 128.

On généralise ce problème en l'énonçant ainsi : *inférer un nombre* m *de moyens proportionnels géométriques entre deux termes donnés* a *&* ω? Alors $n = m + 2$, & $n - 1 = m + 1$; & la progression cherchée sera..... $\div\!\!\cdot\!\!\cdot\ a : a\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}}$: &c. Mais $a\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{a^{m+1}}{a}\omega} = \sqrt[m+1]{a^{m+1-1}\omega} = \sqrt[m+1]{a^m\omega}$. La progression cherchée devient donc :

$\dddot{:} a : \sqrt[m+1]{a^m \omega} : \sqrt[m+1]{a^{n-1} \omega^2} : \ldots$
$\sqrt[m+1]{a^{m-2} \omega^3 \ldots\ldots \omega}.$

PROBLÊME VII. Entre les termes conſécutifs d'une progreſſion géométrique, inſérer un nombre p de moyens proportionnels.

Soit repréſentée par $\dddot{:} aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4$: &c. la progreſſion dont il s'agit. Par une propriété des progreſſions géométriques expliquée plus haut, ſi l'on insère entre les expoſans conſécutifs des termes de notre progreſſion un nombre p de moyens proportionnels arithmétiques, les termes affectés de ces expoſans ſeront les moyens proportionnels géométriques demandés. Ainſi, pour inſérer cinq de ces termes dans la formule, on écrira,

$\dddot{:} aq^0 : aq^{\frac{1}{6}} : aq^{\frac{2}{6}} : aq^{\frac{3}{6}} : aq^{\frac{4}{6}} : aq^{\frac{5}{6}} : \ldots$
$aq^1 : aq^{1+\frac{1}{6}}$ ou $aq^{\frac{7}{6}} : aq^{\frac{8}{6}}$: &c.

C'eſt ici la méthode employée par les premiers calculateurs de logarithmes, comme nous le verrons dans le troiſième volume.

PROBLÊME VIII. Trouver le quinzième terme d'une progreſſion géométrique dont le premier terme $a = 12$, & l'expoſant $q = 100$.

Soit appelé ω le quinzième terme cherché, n ſera alors 15, & l'on aura $\omega = aq^{n-1}$; par les ſubſtitutions... $\omega = 12 \times 100^{14} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 12000000000000000000000000000. L'uſage des logarithmes abrège cette ſolution.

Solutions des problêmes du premier degré.

Solution du problême A. Le nombre des écus eſt 12.

Solution du problême B. Dans ſept ans l'âge du père ne ſera que le triple de celui du fil.

Solution du problême C. La perſonne charitable avoit 24 ſous, & elle avoit trouvé onze pauvres.

Solution du problême D. Cet ouvrier gagnoit 6^{ft} par ſemaine.

Solution du problême E. Cet oncle avoit ſept neveux & quatre nièces.

Solution du problême F. La formule qui réſout les trois cas du problême eſt $x = \frac{cn \mp d}{b + c}$, & x exprime le nombre des coups manqués.

Solution du problême G. Ce joueur avoit 21st avant que de jouer.

Solution du problême H. En commençant, A avoit 26 écus, B en avoit 14, & C en avoit 8.

Solution du problême I. Soit A le courier de Paris, B celui de Fontainebleau, le rapport de leurs viteſſes reſpectives $:: m : n$, la diſtance de Paris à Fontainebleau $= d$, la diſtance de Paris au lieu de rencontre ſera... $x = \frac{md}{m+n}$. Faiſant dans cette formule $d = 14$, $m = 3$, $n = 4$, on trouvera $x = 6$ lieues.

Problêmes du ſecond degré à réſoudre.

Problême AA. Trouver un nombre tel qu'en le diviſant en m parties égales, le produit de toutes ces parties ſoit égal à celui de $m+1$ parties égales du mê-

me nombre ; de manière, par exemple, que le produit des deux moitiés de ce nombre ſoit égal au produit de ſes trois tiers ?

Problême BB. Etant donnés le produit p de deux poids, & leur différence d, chercher combien chacun de ces poids-là pèſe.

Problême CC. Etant connues la ſomme de deux nombres & la ſomme de leurs cubes : trouver ces nombres.

Problême DD. Quel eſt le nombre dont p fois la puiſſance m eſt égale à g fois la puiſſance $m+2$?

Solutions des problêmes du ſecond degré.

Solution du problême AA. Le nombre demandé eſt $6\frac{3}{4}$, ou $\frac{27}{4}$. Voici la formule de ces ſortes de problêmes,..

$$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Solution du problême BB. La valeur des

des deux poids eſt exprimée par la formule.... $\pm\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{4p+d^2}{4}}$... en prenant + pour le plus grand, & — pour le plus petit.

Solution du problême CC. La ſomme de ces nombres étant a, & b la ſomme de leurs cubes; la formule..... $\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$ exprime la valeur du plus grand avec le ſigne poſitif, & celle du plus petit avec le ſigne négatif.

Solution du problême DD. La formule..... $x=\sqrt{\frac{p}{g}}$ exprime la valeur du nombre cherché.

N. B. Ces Tables, qui complettent le Traité d'Arithmétique, n'ayant pu entrer dans ce Traité qu'elles auroient trop groſſi, & exigeant pour plus grande facilité la connoiſſance des logarithmes, ſe trouveront ici à la ſuite de l'Algebre, qui ſe lie naturellement avec l'Arithmétique.

Les Tables ſuivantes donnent la connoiſſance des monnoies qui ont cours, dans les quatre parties du monde; elles préſentent à-la-fois les noms des eſpèces, les lieux où elles ont cours, leur poids, leur titre & leur valeur en argent de France, avec des obſervations relatives aux articles qui méritent une explication plus étendue. Les poids & les titres rapportés, ont été établis & conſtatés ſoit par des eſſais authentiques, ſoit par des eſſais particuliers, faits avec toute la préciſion dont cet art eſt ſuſceptible; & leur valeur en argent de France eſt annoncée ſur les prix fixés, moins par leur valeur intrinſéque, que par la volonté des Souverains, ou par l'uſage.

C'eſt d'après l'eſſai ſur la qualité des monnoies étrangères fait par M. Macé de Richebourg, ancien Inſpecteur de MM. les Elèves de l'Ecole Royale Mi-

litaire, qu'on rapporte le poids, le titre & la valeur de quelques monnoies étrangères, avec la quantité de grains de fin qu'elles contiennent en matière pure, c'eſt-à-dire, dégagées de tout alliage.

Enfin la valeur des anciennes monnoies de France annoncée, eſt celle que l'on donne aux Hôtels des Monnoies, fixée par les Tarifs arrêtés en la Cour des Monnoies.

TABLES de la plûpart des Monnoies courantes dans les quatre parties du monde, contenant leurs noms, les lieux où elles ont cours, leurs poids, leur titre & leur valeur, avec des observations rédigées, en 1767, par M. Albert de Baſinghen, Conſeiller-Commiſſaire en la Cour des Monnoies de Paris.

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr	kar.	32.	liv.	ſol.	den.
Albertus....	Flandre.....	1		24	21	12	14	11	7
Auguſte....	Saxe.....	3		35	21	12	38	6	9
Auguſte, 1756, *altéré*....	Saxe.....	1	½	56	15	8	13	8	8

Bezant.....	Bizance....	la 3e race des R. F.....			24				
Carolin.....	Francfort...	2		19	18	16	24	6	5
Carolin.....	Anſpach....	2		29 $\frac{1}{3}$	18	6	22	8	5
Carolin.....	Bade-Dourlach.....	2	$\frac{1}{2}$	1	18	8	22	9	5
Carolin.....	Bavière.....	2	$\frac{1}{2}$	3	18	14 $\frac{2}{3}$	23	19	11
Carolin.....	Cologne....	2	$\frac{1}{2}$		18	16	23	13	1
Carolin.....	Fulde.....	2		35 $\frac{1}{2}$	18	8	23	5	5
Carolin.....	Heſſe.....	2	$\frac{1}{2}$		18	16	23	13	3
Carolin.....	Heſſe-d'Arm.	2	$\frac{1}{2}$		18	21	23	17	2
Carolin.....	Heſſe-Caſſel.	2	$\frac{1}{2}$	1	18	16	23	15	9
Carolin.....	Montfort...	2		33	18	4	22	15	9

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.			Titre.		Valeur en argent de France.		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	ſol	den.
Carolin.....	Palatinat.....	2	½	1 ⅓	18	10	23	13	5
Carolin.....	Wirtemberg.	2	½		18	10	23	8	5
Caſtillan....	Eſpagne.....	.....			.....			10	
Chaiſes, 1308.	France.....	1	½	14	24		1	5	
Charles.....	Brunſwick..	1	½	15	21	24	19	1	
Chérif.....	Egypte.....	.....			.....		6	17	3
Copec.....	Moſcovie...			14	21	18	1	19	8
Cruzade, 1734.....	Portugal, ...			18	21	28	2	16	10

Denier d'or de S. Louis à l'Aignel...	France.....	1		5	24			12	6	
Denier d'or aux fleurs-de-lys, Roi Jean	France.....	1		30	24	2	2			
Double Hen. Henri III...	France.....	1	½	29	22	¾	12			
Doub. Louis, 1726	France.....	4		18	22		48	ava.	1785.	
Ducat.....	Wirtemberg.		½	29	23	16	10	17		
Ducat.....	Saxe.....		½	29	23	16	10	17		
Ducat.....	Mayence....		½	28	23	16	10	13	8	

MONNOIES D'OR.

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.			Titre.		Valeur en argent de France.		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	fol.	den.
Ducat.....	Hanovre, George II..		½	27	23	16	10	10	3
Ducat.....	Suède.....		½	29	23	16	10	17	
Ducat.....	Hollande..		½	29	23	24	10	19	4
Ducat.....	Danemarck.		½	29	21	24	10	19	4
Ducat cour..	Danemarck..		½	16	21		7	15	2
Ducat.....	Hesse-d'Arm.		½	29	23	8	10	14	8
Ducat.....	Hambourg..		½	29	3	12	10	15	10
Ducat R....	Bohême,....		½	30	23	24	11	2	8

Ducat.....	Francfort...		½ 29	23	20	10	18	2
Ducat.....	Italie.....		½ 29	23	20	10	18	2
Ducat.....	Hongrie....		½ 29	23	24	10	19	4
Ducat.....	Pruſſe.....		½ 29	23	24	10	19	4
Ducat double	Palatinat....	1	½ 22	23	16	21	15	1
Ducaton....	Hollande...	.....		23	16	33	13	3
Ecus à la Couronne, 1300 — 1418.	France.....	1	30	24		2		
Fanos.....	Aux Indes..	*depuis trois ſols juſqu'à ſix ſols.*						
Fleurs-de-lys d'or. 1365.	France.....	1		24		1		
Florins.....	Bourgogne..		½ 13	17	½	12		

MONNOIES D'OR.

Noms des Espèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	kar.	⅏.	liv.	fol.	den.
Florins.....	Allemagne & Metz.....		½	13	14		10		
Florins doub.	Hanovre....	1	½	24	18	14	16	5	
Florin.....	Hanovre....		½	28	18	24	8	2	6
Franc d'or fin 1360.....	France.....	1		1	24		1		
Francs à cheval. 1423.	France.....		½	21	24		1		
Frédéric....	Berlin.....	1	½	18	21	24	19	9	4

Frédér. 1756	Berlin.....	1	½	18	15	12	13	15	3
Goltſchut...	Chine.....	*pèſe ordinairement trente-deux onces.*							
Guinée de 1753 valant 21 ſchelins.	Angleterre..	2		13	22		24	18	8
		en matière pure.					+	3872/17717	
Pièces de 5 guinées....	Angleterre..	10	½	25	21	30	123	13	7
½ Guinée ...	Angleterre..	1		3	21	24	11	15	6
Henri d'or, Henri II...	France.....		½	32	23	¼	2	10	
Hongre.....	Hongrie....	.....			23	8	10	10	
Jacobus, de Jacques I...	Angleterre..	2		24	22		14	10	

MONNOIES D'OR.

Noms des Espèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	fol.	den.
Léopold de 1702, de 36 ¼ au marc	Lorraine....	1	½	18	21	24	18 à 19		
Lion d'or...		1		20	24		1	5	
Lys d'or, 1656.....	France.....	1		3 ½	23	¼	7		
Louis d'or de 1726.....	France.....	2		9 ⅗	22		24	av. 1785.	

Louis d'or de 1785, de 32 au marc...	France.....	2			22		24 dep. 1785.			
Louis vieux, antérieurs à 1709.....	France.....	1	$\frac{1}{2}$	18	21	$\frac{2}{32}$	19	1		
Louis de $37\frac{1}{2}$ au marc...	France.....	1	$\frac{1}{2}$	14	22		18	12		
Louis au Soleil.....	France.....	2		9	21	24	23	5		
Louis de 25 au marc..	France.....	2	$\frac{1}{2}$	4	22		27	18		

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France*		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	ſol.	den.
Louis de Noailles....	France.....	3		14	21	24	34	16	
Louis *ou* Piſtole...	Palatinat....	1	½	16	21	21	19	1	6
Louis *ou* Piſtole...	Lunebourg..	1	½	17	21	20	19	4	1
Mœdadovio.	Portugal....	.....			21	22			
Marabotin..	France.....	1		4	23		11	11	

Maravedis										
1180 — 1223.	France.....	1		13	23			11		
Marionete...	Lorraine....		½	13	16		⅛			
Maſſe d'or,										
1285.....	France.....	.....			22					
Maures.....	Surate.....	.....			18	16				
Maxe.....	Allemagne..	1	½	13 ½	18	8		15	15	
½ Maxe.....	Allemagne..	1	½	30	18			8	4	3
Median.....	Tremeux en Barbarie..	*vaut 50 aſpres.*								
Mérigal....	Sofala.....	*pèſe un peu plus que la piſtole d'Eſpag.*								
Milleray....	Portugal....	*vaut un peu plus que la piſtole d'Eſpa.*								
Mœda.....	Portugal....	.....			..environ...			31	10	

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	kar. 32.	liv. ſol. den.
Nobles à la Roſe, 1334.	Angleterre..	2	23 $\frac{3}{4}$	
Nobles-Henri.....	Angleterre..	1 $\frac{1}{2}$ 22	23 $\frac{1}{2}$	
Or.....	*Un million d'or, eſt un million d'écus de 3^{tt}.*			
Or ſol.....	*Cette expreſſion de compte triple la valeur ordinaire.*			
Oubang....	Japon.....	*vaut environ cent rixdalles d'Hollande.*		
Pagodes....	Indes orient.	*un peu au-deſſous de la $\frac{1}{2}$ piſtole d'Eſp.*		

Pavillon, en 1339.....	France.....	1		24	24		1	10	
Philippus...	Flandres....	*voyez* Ride.							
Pièces *ou* Liſbonines.	Portugal....	3	½	18 à 20	22		42	2	
Piſtole d'or..	Eſpagne....	1	½	18 ½	22		19	19	10
Piſtole double, au balancier, à la croix, potencé & à l'écuſſon ſimple.....	Eſpagne....	3		30	21	24	38	12	5

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	Lieux où elles ont cours	Poids.			Titre.		Valeur en argent de France.		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	ſol.	den.
Piſtole cornue.....	Eſpagne....	3	½	1	21	24	39	14	5
Piſtole ſimple cornue...	Eſpagne....		½	21	21	28	9	18	11
Piſtole.....	Eſpagne....	1	½	17	21	24	19	12	6
Piſtole de Ferdinand & d'Iſabelle.	Eſpagne....	1	½	21	23	25	22	10	2

Quart de Piſtole.....	Eſpagne....			33	21	16	5	10	5
Piſtole.....	Eſpagne....	1	½	19	22		20	3	4
Piſtoles....	Eſpagne....								
Piſtole d'or..	Savoie.....	2	½	1	21	¾	28	5	7
Portugaiſes, en France ſous Louis XIII.....	Portugal....	9			23	¾			
Quadruple..	Pérou.....	7			21	18	79	2	7
Quinzains d'or en 1719.	France.....	.....			24		15		

MONNOIES D'OR.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	kar.	32.	liv.	fol.	den.
Reines d'or, Blanche, mere de S. Louis....	France.....	3	½		23				
Ride, *ou* Philippus.	Flandres....		½	24	13				
Rider.....	Hollande...	2	½	7	22		29	4	6
Roſe-noble..	Hollande...								
Roupie.....	Mogol, &c..	2	¾	11	24		38	1	1

Roponi.....	Toscane.....	2	½	16 ½	23	28	33	14	1
Rubie.....	Alger, Congo & Labes.	*v. 35 aspres.*							
Ruyder.....	Hollande...	2	½	5	22		29	4	9
S. Etienne..	Portugal....	1	½	18	21	28			
S. Thomé...	Portugal....		½	27	23		10	15	0
Saluts d'or..	France.....	1		1	24		1	5	0
Scharafy....	Egypte.....	*vaut l'ancien écu de France.*							
Scherefy....	Perse.....	*vaut 64 réaux d'Espagne.*							
Schérifs *ou* Sultanins.	Au Caire...	.....			.....		5 à 6tt		
Sequin.....	Rome, Florence, &c.	.....			23	14			

MONNOIES D'OR.

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.	Titre.	Valeur en argent de France.
		gros. ½ gr.	kar. 32.	liv. sol. den.
Sequin.....	Gènes.....	½ 29 ½	23 7/8	11 4 8
Sequin.....	Turquie....	*même que le Scherif.*		
Séraphin....	Perse.....	*même que le Scharafy.*		
Souverains..	Pays-Bas....	1 32	22	16 8 9
Souverains,	Pays-Bas Autrichiens, 1759.....	2 ½ 29	22 6	32 18 11
½ Souverains.	1750.....	1 32	21 24	10 1 4

Sultanin

Sultanin....	Au Caire...	*même que le Schérif.*
Tela.....	Perſe.....	*vaut le ducat d'or d'Allemagne.*
Tonne d'or..	Hollande...	*monn. de compte vaut* 100000 *fl. d'Holl.*
Ziam.	Alger.....	*vaut cent aſpres.*

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	den.	32.	liv.	ſol.	den.
Abaſſy.....	en Perſe...		½	22	8	20		18	4
Abra.....	Pologne & Conſtantin..		½	18	6	10		3	6
Abukeſh *ou* Dallers.....	Au Caire...	3	½	27	8	20	3	4	2
Altin.....	Moſcovie...	*monnoie de compte*.....						4	8
Areb.....	Amadab....	*monnoie de compte vaut* 400 *lacks.*							
Aſpres.....	Turquie....	*environ* 120 *pour* 3^{tt}.							
Atche.....	Turquie....	.....			4				4 $\frac{1}{2}$

Baat.....	Siam.....	4 6	9 12		
Baïoque....	Rome.....	.....	.....		9
Batz.....	Allemagne..	*vaut 4 cruzers.*			
Batzen.....	Allemagne..	.....	.....	3	3
Bazzo.....	Allemagne..	*variable; environ*		1	6 $\frac{1}{5}$
Béisty *ou* Besty.....	*ancien. mon*	.....	.....	1	5 $\frac{1}{9}$
Bezorch....	Ormus.....	*étain allayé.*			3
Blaffert.....	Cologne....	.....	.....	4	$\frac{1}{3}$
Blamuiſer...	Flandres....	*ancien. mon.*		6	6
Blanck.....	Hollande..	*monnoie de compte*.....		1	6
Blancs.....	France	*ancien. mon.*			
Blankil.....	Maroc ...	.....	.....	2	6

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	den. g.	liv. fol. den.
Blare.....	Berne.....	.....	.....	2 1
Burbas.....	Alger.....	12 *v.* 1 *aſpre*		
Caboletto...	Gènes.....	.....	.....	4
Cache.....	Siam, Chine	.....	...*environ*..	9
Campner-d'Haller..	Hollande...	.....	.....	2 17
Caragrouch..	Empire.....	*à Conſtantin.* 116 *aſpres.*	10 23	2 18 5
Carbequi...	Teffliès.....	.....	.....	3 4

Carlin.....	Naple.....	10	.....	7	
Caroline....	Suède.....	.....	.....	19	2
Carolus, Charles VIII.	France.....	.....	10 18		10
Cash.....	Tonquin ...	.....	.....	*peu plus de* 1	
Cavalot de Louis XII.	France.....	.....	6		
Cavallo.....	Piémont....	.....	1 12		
Cauris *ou* Coris	Bengale & Siam.....	*coquilles dont* 2400 *valent une roupie.*			
Caxa..,....	Aux Indes..	*mélange de cuivre grossier & de plomb.*			
Cayas.. ...	Aux Indes..	.....	.....		$\frac{5}{6}$
Chaoury....	Tefflès.....	.....	.....	5	6

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France*
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	den. gr.	liv. fol. den.
Chayé, Scagh *ou* Chay.....	Perſe.....	.....	.....	4 7
Chéda.....	Aux Indes..			
Chéda octo..	.....	.....	.....	2 $\frac{1}{2}$
Chéda rond .	.....	.....	.....	7
Chouſtac....	Pologre....	.....	.....	8
Cockien....	Japon.....	.....	.....	8

Commaſe...	Moka.....	.....			.....			3	2	
Conpan....	Indes orient.	.....			.....			9	5	
Conadez....	Cochin	.....			.....				7	
Copec ovale.	Moſcovie..			8	10		12		16	
Couronne *ou* Crooton..	Angleterre..	7		60	11		2	5	15	1
Couronne...	Dannemarck.	4	½	14	10			3	6	5
Crazi.....	Toſcane....	.....			.....				4	
Creuzer....	v. *Kreutzer*.									
Croche.....	Bâle.....	.....			.....					2 ⅓
Crohol.....	Berne.....	*monnoie de compte vaut* 100 *kreutzers*.								
Croiſade....	Portugal...	3		59	10		19	2	19	
Croizat.....	Gènes.....	10		4	11		9	8	3	9

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. ½ gr.	den. gr.	liv. fol. den.
Croon ſimple	Copenhague.	.....	....., ...	3 4 $\frac{17}{24}$
Croon double	Copenhague.	.....	.....	6 8 2 $\frac{5}{12}$
Croon quadr.	Copenhague.	.....	.....	12 16 4
Croone.....	Berne.....	*mon. de com.*		
Croutac	Dantzick ...			
Crown	Angleterre..	7 ½ 35	11	6 3 7
Cruys-Dalder	Koniſberg...	.....	8 25	7 1 10
Cruzade....	Portugal....	3 ½ 32	10 19	3 12

Chriſtine ...	Suède.....	.....	.....		14	11
Daller Germanique..	Allemagne..	7 ½ 8	11 6	5	9	5
Daller.....	Hollande ...	7 6	8 20	3	4	2
Daller.....	Bâle, S. Gal.	7 ½ 8	10	4	6	4
Danck.....	Perſe.....	⅙ de drag.				
Déalder	Hollande...	7 ½ 15	10 5	3	3	
Déalder Banco.....	Hambourg..	.....	.....	3	11	
Déalder courant.....	Hambourg..	.....	.....	3	3	½
Denier.....	.....	*mon. de com.*	*variable.*			
Deni. comm.	Amſterdam..	.....	.....			2 1/21

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.	Titre.	Valeur en argent de France.
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	den gr.	liv. sol. den
	Anvers.....	....	... .	2 $\frac{1}{21}$
	Amsterdam.	.....	.....	I $\frac{7}{8}$
Denier de	Anvers.....	....	.....	I $\frac{7}{8}$
gros....	Bâle	.....	.....	I $\frac{7}{5}$
	Bergame....	....	.....	$\frac{4}{7}$
Le Denier..	Florence....	.....	.....	$\frac{5}{6}$
Celui d'or..	.....	.....	.....	5 $\frac{1}{18}$
Den. courr. petite mon.	Genève.....	.....	.....	I $\frac{7}{5}$

Denier commun.....	Livourne...	.....	.....		5/8 5/8
Denier d'or	.....	.....	.....		1
Denier lubs banco....	Hambourg..	.....	.....		2
Deni. ſterlin.	Londres....	.....	.....	1	9
	Milan.....	.....	.....		
	Paris.....	.....	.....	1	
Denier.....	Rome.....	.....	.....	4	
	Valence....	.....	.....	3	
	Veniſe.....	.....	.....		
Denier tournois.....	France.....	*monnoie de compte dont* 12 *valent* 1 *ſol.*			

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. ½ gr.	den. gra.	iv. ſol. den.
Deni. Pariſis	.....	*monn. de compte d'un quart plus forte.*		
Den. ſterling	Angleterre,.	*monn. de compte dont* 12 *valent* 1ß *ſterl.*		
Denier de gros.....	Pays-Bas....	*mon. de compte dont* 12 *val.* 1ß *de gros.*		
Derling....	Veniſe.....	1 ½ 12	11 2	15
Dimph.....	Pologne...	.....	.....	15
Dinarbeſty..	Perſe.....	*monn. de compte qui vaut* 10d *ſimples.*		
Double.....	Alger.....	.....	.....	12

Doudou.....	Pondichéri & Surate....	.....	.....			6
Douzain de François I.	France.....	.....	.....			12
Dreyes.....	Saxe.....	.....	.....			12
Dregling...	Holſtein....	.....	.....			8
Diye-Gul...	Hollande...	1 onc. 19	10 21	5	7	2
Dubbeltie...	Hollande...	*vaut 2 ſtuyers ou ſols de Hollande.*				
Ducaton...	Hollande...	1 onc. $\frac{1}{2}$ 2	11 3	6	14	3
	Livourne...	...*Idem*....	...*Idem*....	5	18	
	Milan.....	.....	.....	6	3	2
	Piémont....	.....	.....	6	1	
	Veniſe.....	.....	.....	6	4	

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	$\frac{1}{2}$	gr.	den.	gr.	liv.	ſol.	den.
Ducaton, en 1749.....	Pays-Bas Autrichiens.	1 onc.	$\frac{1}{2}$	15	10	$\frac{10}{24}$	6	9	8
Ducaton....	Liége.....	1 onc.		31	11	1 $\frac{1}{2}$	6	11	11
Dutte *ou* Duyte....	Hollande...	.....			.....				3
Dutgen.....	Dannemarck.	.....			.....			5	
Ecu.....	France.....	7	$\frac{1}{2}$	15 $\frac{15}{83}$	11		6		
Demi-Ecu..	France.....	3	$\frac{1}{2}$	25 $\frac{49}{83}$	11		3		

Cinquième d'Ecu....	France.....	1	1/2	3 3/8	11		1	4		
Dixième d'Ecu....	France.....	1	1/2	19 43/83	11				12	
Vingtième d'Ecu....	France.....			27 63/83	11				6	
Ecu.....	Hanovre....	7		25	10	14	5		10	
Ecu.....	Hambourg..	7	1/2	9	10	14	5	14	2	
Ecu.....	Pavière.....	7		25	9	21	5	2	6	
Ecu.....	Ratisbonne..	7		23	9	23	5	3	1	
Ecu.....	Bareith.....	3	1/2	2	8	19 1/2	2	4		
Ecu.....	Anspach....	7		22	9	21	5	2	4	
Ecu.....	Suède.....	7	1/2		10	10	5	12	10	

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.			Titre.		Valeur en argent de France.		
		gros.	½	gr.	den.	gra.	liv.	fol.	den.
Ecu double..	Dannemarck	1 onc.	7	7	10	9	11	1	8
Ecu à l'Aigle & au Trophée.....	Prusse.....	7	½	21	9		3	13	9
Ecu gros...	Nassau-Weilbourg..	6	½	18	11	18	5	12	3
Ecu gros....	Palatinat....	6	½	20	11	20	2	16	
Ecu petit...	Bade-Dourl..	3	½	6	8	22	1	3	3

Ecu.....	Savoie.....	1 onc.	1 14	10 12	7 3	1
Escalin.....	Hollande...	.....		.....	7	6
Esterlin.....	Angleterre,.	.....		.....		4
Fanos.....	Aux Indes..	*d'argent vaut un peu moins de*.....				18
Fardos.....	Bantam.....	.....		.....	3	
Fartin *ou* Fardin....	Angleterre..	.....		.....	*environ*...	3
Fayole.....	Japon.....	*monn. de compte environ* = *à* 10 *livres.*				
Felours.....	Maroc.....	.....		.....		4
Fenin.....	Naumb.....	.....		.....		3
Flett.....	Dannemarck.	.....		.....	3	
Flett-Marc-Danche...	Dannemarck.	.....		.....	16	

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.			Titre.		Valeur en argent de France.		
		gros.	½	gr.	den.	gr.	liv.	fol.	den.
Florin de 1602 & 1603	Gènes.....	1		6	11	6		15	
Florin.....	Liège.....	2		27	6	16	1	2	5
½ Florin....	Mayence....	2	½	1	9		1	12	
½ Florin....	Bade-Dourlach.....	1	½	25	8	22	1	3	3
Florin.....	Palatinat....	3		25	11	20	2	6	
½ Florin....	Brunſwick ..	2		1	9	23 ½	1	8	5

½ Florin....	Bade-Bade...	1	½	13	8	20	1	1	
½ Florin....	Anſpach....	1	½	9	8	23	1	7	
½ Florin....	Bareith.....	1	½	9	9		1	8	
½ Florin....	Cologne....	1	½	16	8	22	1	1	8
½ Florin....	Monfort....	1	½	16	9		1		9
½ Florin....	Nervied....	1	½	15	9		1	1	9
Foile.....	Egypte.....	.....			.....				3
Francs.....									
½ Francs....	France.....	5	½	12	10		1		
¼ de Franc..									
Francesconi.	Toſcane....	7		12	11		5	12	10
Gros.....	*monnoie de compte variable.*								

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	den.	gr.	liv.	ſol.	den.
Gros, pièce de 32 g...	Saxe.....	7	½	10	9		4	17	3
Gros, pièce d'un gr...	Dreſde.....		½	5	3	19		3	
Gros de 32 gros.....	Dreſde.....	7	½	11	10	15	5	15	1
Gros de 8 bons gros..	Mekelbourg.	2		12	7	8	1	2	6

Gros tournois de S. Louis.	France.....	1		$7\frac{26}{28}$	11		12			12
Gulden *ou* Goulde....	Allemagne..	*variable valent* 24ß & 50ß								
Jule	Rome	.....			.....				5	
Konningz-Daelder	Allemagne..	.....			9		22	5	5	5
Konigs-Daler.....	Allemagne..	.....			.....			3	6	8
Karagrach...	Conſtantino.	.....			.....			3		
Kopfſtuck:..	Allemagne..	.....			.....				13	4
Kospfſtuch..	Pologne	1		18	8	21	$\frac{1}{2}$		15	9
$\frac{1}{2}$ Kospfſtuch.	Heſſe-Darmſ.		$\frac{1}{2}$	9	8	21	$\frac{1}{2}$		7	11

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	Lieux où elles ont cours.	Poids.	Titre.	Valeur en argent de France.
		gros. ½ gr.	den. gr.	liv. sol. den.
Kreutzer *ou* Creutzer....	Allemagne..	.....	5 ¼	*environ* 1 ß
Kreutzer *ou* pièce de 6 Kreutzers.	Wirtemberg.	½ 17	4 10	4 7
Pièce de 12 Kreutzers.	Bade-Dourlach.....	½ 33	6 15	9

Lacre *ou* Acre, Lack, Leeth *ou* Lecque. .	Surate.....	*monnoie de compte val.* 100000 *roupies.*				
Lewedaal-ders.....	Hollande...	.....	.....	2	2	
Liard.....	France.....	57 $\frac{3}{5}$	.....			3
Lys *ancien*..	France.....	2 5	11 12	1		
Livre tour-nois.....	France.....	*v. plus bas.*	.....	1		
Livre d'arge. de 1719..	France.....	.....	12	1		
Livre ſterlin.	Angleterre..	*mon. de com.*	*au pair avec le marc à* 48 l. . .	23	14	1

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	den. gr.	liv. ſol. den.
Louis d'arg. de 1641 & 1720.....	France.....	7 8	11	3
Maravedis...	Eſpagne....	.....	.....	*peu plus de* 1
Maille, Obole....	France.....	*mon. de compte v.* 2 *pites.*		$\frac{1}{2}$
Piaſtre.....	Eſpagne....	7 2	10 20	5 8 11 $\frac{8}{10}$

Piaſtre dite Péruvienne, fabriquée en 1745.....	Eſpagne....	7			10		20	5	8	8
Piaſtre vieil.	Mexique....	7			10		21	5	8	6
½ Piaſtre forte de 1728..		3	½	1	10		22	2	14	10
Piaſtre vieille dite du Pérou.....	Pérou.....	7			10	27	½	5	8	11
Piaſtre aux deux globes de 1748...		7		5	10		22	5	9	7

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	den.	gr.	liv.	ſol.	den.
Piaſtre dite quarré long.	N. Mexique.	6	½	30	10	22	5	8	
Piaſtre vieil.	Pérou.....	7		6	10	21	5	9	9
Picoli.....	Sicile.....	*mon. de com.*							
Pièces de 1629 & 1630	Piémont....	1		12	3			2	
Pièces de 1640 & 1642	Piémont....	1		12	2	6		1	9

Pièces.....	Savoie.....	1	½	5	2	23	3		
Pièces.....	Gènes.....	1			5	22	4		
Pièces.....	Gènes.....	1	½	5	5	14	6		
Pièces pré-sence.....	Aix-la-Chap.	1	½	11	6	23	16	3	
Pièces d'un Stuber...	Comté de la Marck....		½	1	2	16	1	11	
Pièces.....	Pologne....			23	4	4	1	10	
Pièces d'un Stuber de 1736.....	Bergues & Juliers...		½		2	20	2		

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Espèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*		*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros. $\frac{1}{2}$	gr.	den.	gr.	liv.	sol.	den.
Pièces d'un Stuber de 1738.....	Bergues & Juliers...	$\frac{1}{2}$	9	2			1	9
Pièces d'un Stuber....	Cologne....		35	2	16	1	10	
Pièces vieilles d'un Stuber.....	Clèves.....	$\frac{1}{2}$	2	2	4		1	7

Pièces de 2 Stubers...	Diatorff....	1	½	33	2	10		6	8
Pièces de 2 Stubers...	Cologne....		½	21	3	16		4	6
Pièces de 3 Stubers de 1720.....	Cologne....		½	32	4	20		6	5
Pièces de 3 Stubers de 1750.....	Cologne....		½	32	4	10		5	11
Pièces de 4 Stubers...	Brandebourg	1		12	5			8	3

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*			*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros.	½	gr.	den.	gr.	liv.	fol.	den.
Pièces de Philippe IV.	Eſpagne....	7		21	10	9	5	8	3
Pièces de Philippe IV en 1630...	Eſpagne....	1		33	11	2	6	14	1
Pièces de Charles II en 1672..	Eſpagne....	4		4	11		3	3	10

Pictot.....	Malte.....	.....	.....			3	
Piſtole.....	France.....	*monnoie de compte*.....			10		
Pite.....	France.....	*monn. de compte vaut* $\frac{1}{2}$ *maille ou obole* $\frac{1}{4}$					
Pitis.....	Iſle de Java.	*Coxa des Chinois*, 200 *valent*			1	6	
Plapper.....	Bâle.....	.....	.....		1		
Poldingue...	Moſcovie...	200 *Poldingues valent* 1 *Rouble.*					
Polduras *ou* Poltrachs..	Moſcovie...	16	2	20	11		
Poluske.....	Moſcovie...	*vaut* $\frac{1}{2}$ *Copec.*					
Pound.....	Angleterre..	*ſynonyme de pièce & de livre ſterling.*					
Pouny.....	Mogol.....	*mon. de com. dont* 38 *v.* 1 *Roup. de Mad.*					
Quadrin....	Rome.....	50 *Quadrins valent* 1 *Jule.*					
Quart d'Ecu.	France, 1580	2 $\frac{1}{2}$	1	11		15	

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*	*Titre.*	*Valeur en argent de France.*
		gros. $\frac{1}{2}$ gr.	den gr.	liv. fol. den.
Quarto.....	Eſpagne....	*vaut 4 maravédis.*		
Quilo.....	Florence....	.....	.....	2 13 4
Ratze.....	Suiſſe.....	*monnoie de billon.*		
Réale & Réaux....	Eſpagne....	8e *partie de la piaſtre courante.*		
Réaux de 8.	Eſpagne....	7 32	11 6	
Réal de Vellon.....	Eſpagne....	$\frac{1}{15}$ *de piaſtre de plata ou d'argent.*		

Reis.....	Portugal....	.....	200 *reis val.*		1		
Rixdaler....	Hollande...	7	20	10	8	5	6	5
Rixdaler-couronne....	Dannemarck.	7	6	9	23	4	19	9
Rixdaler....	Lubeck.....	7	10	8	20	4	9	3
Rixmarc....	Dannemarck.	.....	...*environ*..			15		
Rixoorsh....	Dannemarck.	.....						
Rizé.....	.....	*monnoie de compte val.* 15000 *ducats.*						
Ronſtique...	Stokholm...	.....	..*environ*...					4
Rouble.....	Ruſſie.....	*le rouble ſe diviſe en* 100 *copecs.*						
Roup.....	Pologne....	.....	10	20		15		
Roupie.....	Mogol, &c..	18	11	15 $\frac{1}{2}$	2	11	*env.*
Taël.....	Chine.....	*variable.*	..*environ* ..		6	10		

MONNOIES D'ARGENT ET DE BILLON.

Noms des Eſpèces.	*Lieux où elles ont cours.*	*Poids.*		*Titre.*		*Valeur en argent de France.*		
		gros. $\frac{1}{2}$	gr.	den.	gr.	liv.	ſol	den.
Tical.....	Siam.....	3	23	10	20	2	10	
Timpfen....	Pologne....	1	35	6	4		12	11
Timpfen....	Pruſſe.....	1 $\frac{1}{2}$		5	20		12	4
Toman.....	Perſe.....	*monnoie de compte vaut 50 abaſſes.*						

De la livre en particulier.

La *livre tournois* eſt compoſée de 20 ſols tournois, & chaque ſol de 12 deniers auſſi tournois.

La *livre pariſis* eſt de 20 ſols pariſis, & le ſol pariſis de 12 deniers pariſis, chaque ſol pariſis valant 15 deniers tournois ; en ſorte qu'une livre pariſis vaut 25 ſols tournois.

La *livre de compte numéraire* eſt compoſée de 20 ſous, & chaque ſou de 12 deniers.

La livre de France vaut

A Amſterdam, 9 ſols communs & 5 fenins.

Anvers, 9 ſols communs & 6 fenins.

Auſbourg, 22 kreutzers & 2 fenins.

Avignon, 1 livre comme en France.

Bâle, 22 kreutzers.

Bergame, 40 ſols de change.

Berlin, 6 bons gros.
Breſlaw, 22 kreutzers & 6 fenins.
Cadix, 4 réaux de vellon.
Conſtantinople, 40 aſpres.
Cracovie, 22 gros Polonois & 6 fenins.
Copenhague, 15 ſchellings Danois & 6 fenins.
Dantzick, 22 gros Polonois & 6 fenins.
Dreſde, 6 ſylvers gros.
Florence, 3 ſols & 11 deniers d'or.
Francfort, 22 creutzers & 6 fenins.
Gènes, 24 ſols & 8 deniers courans.
Genève, 26 ſols $\frac{1}{2}$ petite monnoie.
Hambourg, 9 ſols lubs de banque.
Koniſberg, 22 gros Polonois & 6 fenins.
Leipſick, 6 ſylvers gros.
Liſbonne, 166 rés & $\frac{2}{3}$.
Livourne, 3 ſols & 11 deniers d'or.

Londres,

Londres, 11 deniers ſterlins.
Madrid, 4 réaux de vellon.
Meſſine, 48 grains.
Milan, 26 ſols 3 deniers courans.
Naples, 14 grains.
Nuremberg, 22 creutzers & 2 fenins.
Palerme, 48 grains.
Peterſbourg, 19 copecs.
Rome, 19 bayoques & 1 quatrini.
Stokholm, 24 ſtuyvers de cuivre.
Turin, 18 ſols & 2 deniers.
Valence, 5 ſols & 8 deniers.
Varſovie, 11 florins $\frac{1}{2}$.
Veniſe, 2 livres.
Vienne, 22 kreutzers & 2 fenins.

Fin du ſecond Volume.

TABLE.

Résolution des équations du premier degré, avec une seule inconnue, page 13

Résolution des équations du premier degré, avec plusieurs inconnues, 33

Elimination des inconnues, 27

Problémes du premier degré à resoudre, 50

Résolution des équations du second degré, 54

Des Rapports & des Proportions, 70

Des Proportions & Progressions arithmétiques, 77

Formules des Progressions arithmétiques, 90

Applications de ces formules, 95

Des Proportions & Progressions géométriques, 102

Propriétés des Progreſſions géométriques, 114
Problême général pour tous les cas des progreſſions géométriques, 121
Formules des Progreſſions géométriques, 130
Applications de ces formules, 135
Solutions des problêmes du premier degré, 142
Problêmes du ſecond degré à réſoudre, 143
Solutions des problêmes du ſecond degré, 144
Tables de la plûpart des Monnoies courantes dans les quatre parties du monde, contenant leurs noms, les lieux où elles ont cours, leurs poids, leur titre & leur valeur, &c. 150
De la livre en particulier, 305

Fin de la Table.